Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
hohen philosophischen Fakultät
der
Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Ernst Boltze
aus Harzgerode.

Göttingen,
Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner.
1908.

Referent: Prof. L. Prandtl.

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Nov. 1908.

Einleitung.

Taucht man einen Körper in eine strömende Flüssigkeit, so beobachtet man, daß vor dem Körper die Strömung glatt ist, hinter ihm dagegen die Flüssigkeit sich in starker Rotation befindet. Man kann sehen, daß diese Rotation nicht sofort eintritt, sobald sich der Körper relativ zur Flüssigkeit zu bewegen beginnt, sondern erst nach einer gewissen endlichen, wenn auch kurzen, Zeit. Bis zu dieser Zeit haben wir auch hinter dem Körper angenäherte Potentialströmung.

Es ist schon vielfach versucht worden diese Erscheinung zu erklären und zu berechnen; doch gelang es erst in neuerer Zeit L. Prandtl[1]) eine zufriedenstellende Theorie über die Entstehung der Wirbel zu finden. In kurzen Zügen sei diese angeführt[2]). An der Oberfläche des Körpers haftet die Flüssigkeit, hier ist also die Geschwindigkeit gleich Null. Mithin existiert eine gewisse Schicht — wir nennen sie Grenzschicht —, innerhalb der die Geschwindigkeit von Null auf den Wert der Potentialströmung anwachsen muß. Ist die Zähigkeit der Flüssigkeit sehr klein, so ist auch die Grenzschicht sehr dünn. Wir haben in ihr also ein großes Geschwindigkeitsgefälle, was dazu führt, daß das Reibungsglied der hydrodynamischen Grundgleichung selbst noch bei kleiner Zähigkeit eine wesentliche Rolle spielt.

Wenn die Grenzschicht in ein Gebiet höheren Druckes eintritt, so erfahren die Teilchen in jeder Entfernung von der Wand Verzögerungen; und da die Teilchen im Inneren der Grenzschicht von vornherein geringere Geschwindigkeit besitzen, so wird sich hier eher als draußen die Geschwindigkeit umkehren und damit

1) Verh. d. intern. math. Kongr. 1904, p. 484 ff.

2) Ausführlicher bei H. Blasius. Dissertation: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. 1908. Zeitschr. f. Math. u. Phys. p. 1 ff.

zu Rückströmung und Strahlbildung führen, wie die für verschiedene Querschnitte gezeichneten Geschwindigkeitsprofile[1]) in Fig. 1 zeigen. Diejenige Stelle, die die Grenze bildet zwischen den Ge-

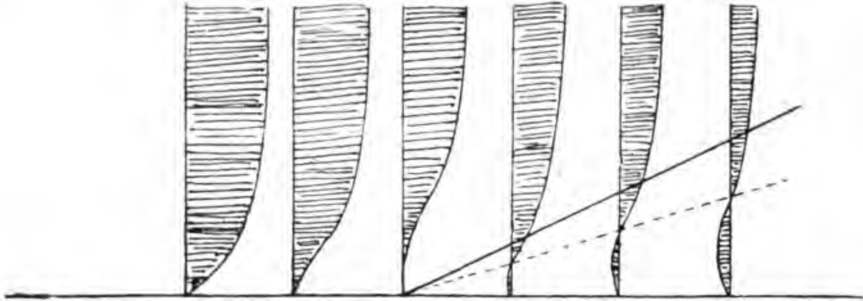


Fig. 1.

schwindigkeitskurven, die nur positive, und denen, die auch negative Teile haben, nennt man Ablösungsstelle. In ihr muß das Geschwindigkeitsprofil die Achse tangieren. Diese Bemerkung erlaubt uns, die Ablösungsstelle zu berechnen.

Diese von L. Prandtl aufgestellte Theorie wurde von H. Blasius[2]) besonders nach der mathematischen Seite hin weiter ausgebaut. In der betreffenden Arbeit[2]) wird sie auf zweidimensionale Probleme angewendet, und es stellt sich dabei heraus, daß auch quantitativ mit Hülfe der oben genannten Grenzschichtentheorie die Wirbelbildung hinter festen Körpern in strömenden Flüssigkeiten dargestellt werden kann.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, die Entwicklungen, die von H. Blasius für zylindrische Körper aufgestellt wurden, auf Rotationskörper zu übertragen und gleichzeitig auf mehr Glieder zu berechnen. Wie später gezeigt werden wird, läßt sich ersteres nicht mehr auf analytischem Wege erreichen, weshalb ich die Zuflucht zu numerischen Methoden nehmen muß; zu deren Ausführung wurde mir vom Institut für angewandte Mechanik zu Göttingen eine Rechenmaschine in freundlichster Weise zur Verfügung gestellt. Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Prandtl. Ebenso schulde ich Herrn Prof. Runge Dank, der mich bei den in dieser Arbeit verwendeten numerischen Methoden mit seinem Rat unterstützt hat.

---

1) L. Prandtl l. c.

2) H. Blasius, Dissertation 1908, (l. c.).

I. Formulierung des Problems und Aufstellung der Grundgleichungen.

Wir nehmen die Konstante der inneren Reibung klein an. Wie bereits oben erwähnt, wird damit auch die Dicke der Grenzschicht klein und zwar sei ihre Größenordnung mit ε bezeichnet. Bis nahe an diese heran herrscht dann Potentialbewegung.

1. Der Arbeit von H. Blasius gegenüber, soll in dieser das Problem der Rotationskörper, deren Achse in Richtung der ungestörten Strömung liegt, behandelt werden. Als Koordinaten für die Grenzschicht bieten sich als zweckmäßig die folgenden (Fig. 2):

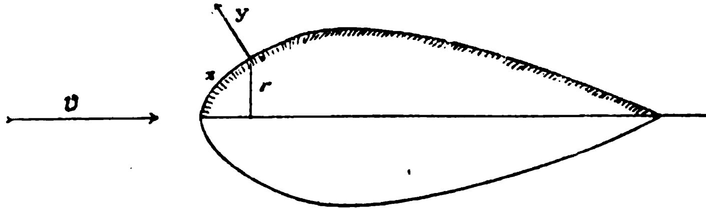


Fig. 2.

x = Bogenlänge längs einer Meridiankurve,
y = normaler Abstand von der Oberfläche des Körpers; die Gestalt des Körpers selbst wird durch
r = den senkrechten Abstand von der Rotationsachse, beschrieben.
r wird in der Grenzschicht zunächst Funktion von x und y, wird aber schließlich nur in seiner Bedeutung als Querschnittradius des Rotationskörpers ($y = 0$) verwandt.

2. Auf diese Koordinaten müssen wir die für rechtwinklige Carthesische Koordinaten aufgestellten hydrodynamischen Grundgleichungen, die in der Vectorschreibweise lauten:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{k}{\varrho}\Delta \mathfrak{v}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

umformen. Die Umformung der Beschleunigungsglieder $(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}$ liefert neben Gliedern wie $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $v\frac{\partial u}{\partial y}$ u. s. w. Zentrifugalkräfte des Typus $\frac{u\,.\,v}{r}$ und $\frac{u^2}{r}$; diejenigen von ihnen, die in der Gleichung für die x-Komponente auftreten, dürfen, da sie von der Größen-

ordnung ε sind, gegen $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \sim 1$ fortgelassen werden können.

Die Resultierende der Reibungsschubkräfte ist nach nebenstehender Figur 3

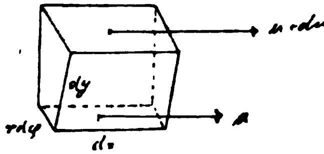


Fig. 3.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(r \frac{\partial u}{\partial y}\right) = r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\quad\ \ \wr \quad\ \wr \qquad\quad \wr \qquad \wr$$
$$\quad\ \ 1 \ \ 1/\varepsilon^2 \qquad 1 \qquad 1/\varepsilon.$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(r \frac{\partial u}{\partial y}\right) = r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Aus der dynamischen Gleichung für die x-Richtung bleibt also übrig:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Die y-Gleichung liefert bei den Größenordnungsabschätzungen $\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{u^2}{r} \sim 1$. Hieraus schließen wir weiter, daß $\frac{\partial p}{\partial x}$ in der Grenzschicht von $\frac{\partial p}{\partial x}$ in der Potentialströmung nur um eine Größe von der Ordnung ε verschieden ist, die wir in der x-Gleichung, wie wir ja nur Glieder ~ 1 beibehielten, vernachlässigen. Somit können wir $\frac{\partial p}{\partial x}$ in der Gleichung aus der Potentialströmung berechnen, also für die Grenzschicht als eingeprägt betrachten. Die y-Gleichung ist damit für unsere Zwecke vollständig ausgenutzt, sie würde anderenfalls nur zur subtileren Berechnung von p in der Grenzschicht dienen.

3. Die Kontinuitätsgleichung wollen wir schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0,$$

wobei wir für einen Augenblick ξ, η, ζ als die rechtwinkligen Koordinaten betrachten. Ganz allgemein nehmen wir dann die Transformation:

$$\xi = \xi(x, y, z); \quad \eta = \eta(x, y, z); \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

vor. Durch ganz elementare Rechnung findet man die neue Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi \eta \zeta}{\partial x y z} u_0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi \eta \zeta}{\partial x y z} v_0\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi \eta \zeta}{\partial x y z} w_0\right) = 0$$

und zwar bedeutet:

$$\frac{\partial \xi \eta \zeta}{\partial x y z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$u_0 = \frac{dx}{dt},\; v_0 = \frac{dy}{dt},\; w_0 = \frac{dz}{dt}.$$

Die gefundene Gleichung ist vollständig allgemein gültig.

Auf unsere Koordinaten der Rotationskörper angewendet gibt dies folgendes:

φ ist Azimut (Fig. 4).

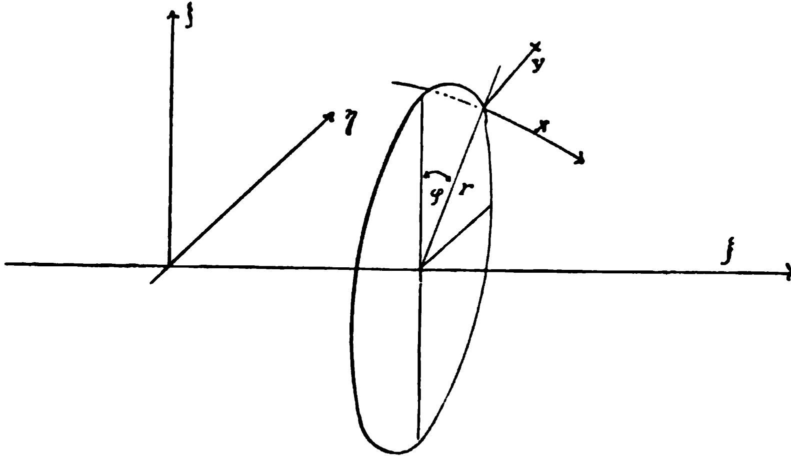


Fig. 4.

Wir haben also:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, \varphi) \\ \eta &= r(x, y)\sin\varphi \\ \zeta &= r(x, y)\cos\varphi \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß x, y und φ senkrecht auf einander stehen, so ist der Wert der Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial \xi \eta \zeta}{\partial x y \varphi} = r.$$

Da ferner aus Symmetriegründen keine Strömung normal zur xy-Ebene stattfinden kann, so muß unsere Kontinuitätsgleichung lauten:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r u_0) + \frac{\partial}{\partial y}(r v_0) = 0.$$

In unserem speziellen Falle hätte man dies Resultat auch direkt durch geometrische Überlegung finden können, indem

$$\frac{\partial}{\partial x}(2\pi r\, dy\, u) + \frac{\partial}{\partial y}(2\pi r\, dx\, v) = 0$$

sein muß.

Ist die Dicke der Grenzschicht von der Größenordnung ε, dann ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \sim 1, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \sim 1, \quad v_0 \sim \varepsilon.$$

Auf die Kontinuitätsgleichung angewendet:

$$\begin{array}{cccccccc} r & \frac{\partial u_0}{\partial x} & + u_0 & \frac{\partial r}{\partial x} & + r & \frac{\partial v_0}{\partial y} & + v_0 & \frac{\partial r}{\partial y} = 0 \\ \wr & \wr & \wr & \wr & \wr & \wr & \wr & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \end{array}$$

Da $\frac{\partial r}{\partial y}$ als Cosinus der Neigung der Meridiankurve von der Größenordnung 1 ist, darf das letzte Glied vernachlässigt werden; r ist mithin nur als Funktion von x zu betrachten.

4. Bezeichnen wir nun auch in der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeit mit u, v, so haben wir als Differentialgleichungen der Strömung um Rotationskörper die folgenden:

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \varrho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial y} = 0$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\text{für } y = 0:\ u = 0,\ v = 0$$
$$\text{für } y = \infty:\ u = \bar{u}.$$

$\bar{u}$ ist die Geschwindigkeit der Potentialbewegung.

Kennen wir die Integrale dieser Gleichungen, so beherrschen wir damit die gesamte Strömung um alle Rotationskörper, sobald

uns die Potentialströmung um diesen Körper bekannt ist. Zur Lösung muß gegeben sein, wie Körper und Flüssigkeit sich gegeneinander bewegen; also entweder die Geschwindigkeit, mit der der Körper durch das Wasser gezogen wird, oder die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, in die der Körper getaucht wird. Beides ist mathematisch nur wenig verschieden.

II. Entstehung der Grenzschicht und Ablösungsstelle beim plötzlichen Beginn der Bewegung aus der Ruhe.

1. Wir wollen das einfachste Bewegungsproblem wählen. Der Körper ruhe bis zur Zeit $t = 0$ in der Flüssigkeit. Zur Zeit $t = 0$ erhalte er plötzlich eine bestimmte Geschwindigkeit $\bar{u}$ und werde dann ohne Beschleunigung weiter bewegt. Die Schwierigkeit der Ausführung des plötzlichen Stoßes kann man dadurch umgehen, daß man den Körper nicht plötzlich, wohl aber hinreichend schnell auf die Geschwindigkeit $\bar{u}$ bringt, d. h. so schnell, daß die Zeit τ, die dazu erforderlich ist (Fig. 5), klein gegen die Ablösungszeit (s. w. u.) ist. In diesem Falle sind nur geringe Abweichungen

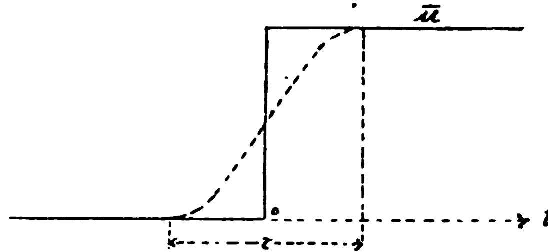


Fig. 5.

der Erscheinungen von den theoretischen Betrachtungen zu erwarten.

Unter der Einwirkung des Stoßes stellt sich im ersten Moment Potentialbewegung ein mit Ausnahme einer unendlich dünnen Schicht an der Körperoberfläche. Von hier aus setzt unter der Wirkung der Reibung die Bildung der Grenzschicht ein.

2. Die Gleichungen, die zu benutzen sind, lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial y} = 0,$$

wobei $\varkappa = \frac{k}{\varrho}$ gesetzt ist. Die zweite Gleichung integrieren wir durch

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Die Gleichungen stimmen bis auf den Faktor $\frac{1}{r}$ mit den Gleichungen überein, die Blasius (l. c.) in dem entsprechenden Problem für den Zylinder fand. Wir können daher den dort gefundenen Ansatz entsprechend übernehmen, ohne die Überlegungen, die dazu führen, zu wiederholen.

3. Wir machen den Ansatz

$$\psi = 2\sqrt{\varkappa t}\sum_0^\infty{}^{\nu}\, t^\nu \chi_\nu(x, \eta)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\varkappa t}}$$

$$u = \frac{1}{r}\sum_0^\infty{}^{\nu}\, t^\nu \frac{\partial\chi_\nu}{\partial\eta} \qquad v = -\frac{2\sqrt{\varkappa t}}{r}\sum_0^\infty t^\nu \frac{\partial\chi_\nu}{\partial x}.$$

Durch Einführen dieser Werte in die dynamische Gleichung findet man die Reduktionsformel:

$$\frac{\partial^3\chi_\mu}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\chi_\mu}{\partial\eta^2} - 4\mu\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta}$$

$$= \frac{4}{r}\sum_0^{\mu-1}{}^{\lambda}\left\{\frac{\partial\chi_\lambda}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\chi_{\mu-\lambda-1}}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\chi_{\mu-\lambda-1}}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial\chi_\lambda}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\chi_{\mu-\lambda-1}}{\partial\eta^2}\right\};$$

für $\mu = 1$ tritt zur rechten Seite $-4\bar{u}\,r\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}$ additiv hinzu. Geben wir μ die Werte $0, 1, 2\ldots$, so erhalten wir die Differentialgleichungen für χ:

$$\mu = 0:\ \frac{\partial^3\chi_0}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\chi_0}{\partial\eta^2} = 0$$

$$\mu = 1:\ \frac{\partial^3\chi_1}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\eta^2} - 4\frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}$$

$$= -4r\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{4}{r}\frac{\partial\chi_0}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\chi_0}{\partial\eta}\right) - \frac{4}{r}\frac{\partial\chi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_0}{\partial\eta^2}.$$

Beschränken wir uns zunächst auf diese beiden. Jedes χ_ν berechnet sich aus den vorhergehenden χ_0 bis $\chi_{\nu-1}$, sodaß die Gleichungen successive integrierbar sind. Da χ_ν Funktion von x und y ist,

unsere Differentialgleichungen aber nur die Abhängigkeit des χ_ν von η bestimmt, so muß sich χ_ν aufbauen lassen aus einer Summe von Produkten aus Funktionen von η und Funktionen von x. Unter Rücksichtnahme auf die Grenzbedingung setzen wir:

$$\chi_0 = r\bar{u}\,\zeta_0(\eta)$$

wo ζ_0 allein von η abhängt und der Gleichung genügt:

$$\zeta_0''' + 2\eta\,\zeta_0'' = 0.$$

Die oberen Striche bedeuten Differentiation nach η.

Dies führen wir in die Differentialgleichung von χ_1 ein. Man findet, daß dann

$$\chi_1 = r\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\,\zeta_{1a}(\eta) + \bar{u}^2\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\zeta_{1b}(\eta)$$

zu setzen ist, wo ζ_1 den Gleichungen zu genügen hat:

$$\begin{aligned} \zeta_{1a}''' + 2\eta\,\zeta_{1a}'' - 4\zeta_{1a}' &= 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'' - 1) &= 4f_{1a} \\ \zeta_{1b}''' + 2\eta\,\zeta_{1b}'' - 4\zeta_{1b}' &= -4\zeta_0\zeta_0'' &= 4f_{1b}. \end{aligned}$$

Aus genannten Gleichungen sind dann ζ_0, ζ_{1a}, ζ_{1b} mit ihren Ableitungen zu berechnen, und man findet dann

$$u = \bar{u}\,\zeta_0' + t\left(\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\,\zeta_{1a}' + \bar{u}^2\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\,\zeta_{1b}'\right) + [t^2].$$

Also haben wir nun die Aufgabe, folgende Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} \zeta_0''' + 2\eta\,\zeta_0'' &= 0 \\ \zeta_{1a}''' + 2\eta\,\zeta_{1a}'' - 4\zeta_{1a}' &= 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'' - 1) \\ \zeta_{1b}''' + 2\eta\,\zeta_{1b}'' - 4\zeta_{1b}' &= -4\zeta_0\zeta_0'' \end{aligned}$$

mit den Grenzbedingungen:

für $\eta = 0$: $\zeta_0 = 0$; $\zeta_0' = 0$; $\zeta_{1a} = 0$; $\zeta_{1a}' = 0$; $\zeta_{1b} = 0$; $\zeta_{1b}' = 0$,
für $\eta = \infty$: $\zeta_0' = 1$; $\zeta_{1a}' = 0$; $\zeta_{1b}' = 0$.

4. Von H. Blasius (l. c.) sind die Gleichungen in geschlossenen Ausdrücken für ζ_0 und ζ_{1a} gelöst worden, indem es möglich war, die homogenen Gleichungen zu lösen. Da wir dies Resultat später noch brauchen werden, möge es hier angegeben werden. Die Gleichungen für ζ_n sind vom Typus:

$$F_n'' + 2\eta\,F_n' - 4n\,F_n = 0.$$

Die beiden Integrale sind dann durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$F_{n1} = \sum_0^n {}^\mu \frac{2^\mu \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\ldots 3.1} \eta^{2\mu} \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

$$+ \sum_1^n {}^\nu \left\{ \sum_\nu^n {}^\mu (-1)^{\mu+\nu} \frac{2^{\nu-1}\binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\ldots(2\mu-2\nu+1)} \right\} \eta^{2\nu-1} e^{-\eta^2}$$

und

$$F_{n2} = \sum_0^n {}^\mu \frac{2^\mu \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\ldots 3.1} \eta^{2\mu}.$$

Wie schon diese Ausdrücke zeigen, werden die ζ, je größer der Index wird, desto komplizierter und daher für weitere Rechnungen unpraktischer. Dazu kommt noch die Schwierigkeit, daß bei $n > 2$ die eingeprägten Kräfte in den Gleichungen für ζ_n Glieder enthalten, die mehr als dritten Grades in $e^{-\eta^2}$ sind. Diese lassen sich nicht mehr zurückführen auf die Funktion $e^{-\eta^2}$ und

$$\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

multipliziert mit Potenzen von η, was zur weiteren Rechnung erforderlich sein würde. Es bot sich daher ein numerisches Verfahren als das nächstliegende dar, wodurch die zweite Schwierigkeit sicher gehoben wird, und beliebig viel Glieder in der Entwicklung von ψ sich berechnen lassen.

5. Die Methode, die ich zur Berechnung verwendet habe, arbeitet mit den verschiedensten Hülfsmitteln. Die Gleichung

$$\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' = 0$$

kann man exakt integrieren:

$$\zeta_0'' = \alpha e^{-\eta^2},$$

woraus durch einmalige Integration folgt:

$$\zeta_0' = \beta + \alpha \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Die Konstanten bestimmen sich aus den Grenzbedingungen

$$\text{für } \eta = 0: \; \zeta_0' = 0$$
$$\text{für } \eta = \infty: \; \zeta_0' = 1$$

Also:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; \; \beta = 1,$$

sodaß:

$$\zeta_0'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}.$$

Die Funktion berechne ich punktweise und leite daraus die Integrale ζ_0' und ζ_0 durch numerische Integration ab. In diesem Falle, wo ζ_0 noch durch eine verhältnismäßig einfache Funktion von η dargestellt ist, würde es nicht weniger einfach sein, dasselbe aus der Formel

$$\zeta_0 = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

zu berechnen. Jedoch schon für ζ_0 wird sich die numerische Rechnung einfacher gestalten.

6. Die numerische Integration ist nach der Simpsonschen Regel ausgeführt. Wir setzen

$$\zeta_0' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \int_0^{\eta} \zeta_0'' d\eta.$$

Dann ist angenähert

$$\zeta_0' = \frac{l}{3} [\zeta_0''(0) + 4\zeta_0''(l) + 2\zeta_0''(2l) + 4\zeta_0''(3l) + \cdots$$
$$+ 2\zeta_0''(\eta - 2l) + 4\zeta_0''(\eta - l) + \zeta_0''(\eta)].$$

Dieser Nährungswert weicht vom wahren Wert des Integrales um Unterschiede ab, die mit l zugleich unendlich klein werden von der vierten Ordnung. Bei dem zu behandelnden Problem sind die Kurven berechnet von 0,1 zu 0,1 Einheiten der η Koordinate. Es ist also:

$$l = 0{,}05$$
$$l^4 = 6{,}25 \,.\, 10^{-6}.$$

Da die Kurven nicht stark oscillierend sind, so wird uns die Simpsonsche Regel die Werte der Integrale mit genügender Genauigkeit geben. Die Integrationskonstanten sind immer durch die Grenzbedingungen bestimmbar. So sind nun die drei Kurven ζ_0'', ζ_0'. ζ_0 numerisch berechnet. Die Werte sind in der folgenden Tabelle [1]) in Intervallen von 0,1 zu 0,1 Einheiten der η Koordinate angegeben (Fig. 6).

---

1) Die Werte der Integrale $\int_{\infty}^{x} e^{-x^2} dx$ sind entnommen: A. Markoff, Tables des valeurs de l'intégral $\int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt$.

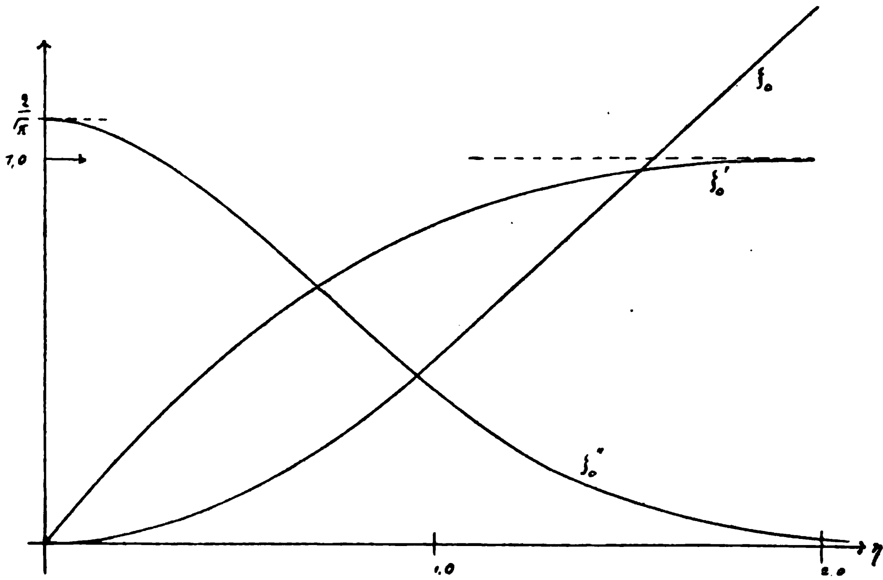


Fig. 6.

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ_0''	1,128	1,112	1,084	1,031	0,962	0,879	0,787
ζ_0'	0	0,112	0,222	0,326	0,427	0,519	0,603
ζ_0	0	0,006	0,022	0,050	0,087	0,135	0,191

η	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
ζ_0''	0,691	0,595	0,502	0,415	0,336	0,267	0,208
ζ_0'	0,676	0,741	0,796	0,842	0,879	0,910	0,934
ζ_0	0,255	0,326	0,403	0,484	0,571	0,660	0,752

η	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
ζ_0''	0,159	0,119	0,087	0,063	0,044	0,031	0,021
ζ_0'	0,952	0,966	0,976	0,984	0,989	0,993	0,995
ζ_0	0,846	0,942	1,039	1,137	1,236	1,335	1,434

7. Mit Hülfe dieser Zahlenwerte können wir die eingeprägten

Kräfte der Differentialgleichungen für ζ_{1a} und ζ_{1b} berechnen. Es war:

$$4f_{1a} = 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0\zeta_0'' - 1)$$
$$4f_{1b} = -4\zeta_0\zeta_0'.$$

Wir erhalten die folgenden Werte (Fig. 7 u. 8).

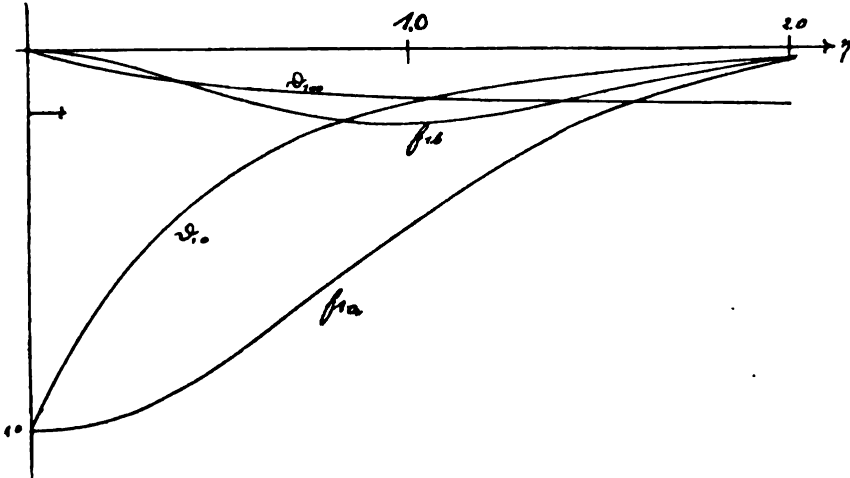


Fig. 7.

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$4f_{1a}$	— 4,000	— 3,975	— 3,850	— 3,776	— 3,607	— 3,396	— 3,149
$4f_{1b}$	0	— 0,025	— 0,097	— 0,205	— 0,337	— 0,474	— 0,601

η	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$4f_{1a}$	— 2,874	— 2,584	— 2,273	— 1,969	— 1,673	— 1,395	— 1,141
$4f_{1b}$	— 0,705	— 0,775	— 0,808	— 0,804	— 0,768	— 0,706	— 0,626

η	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$4f_{1a}$	— 0,914	— 0,717	— 0,552	— 0,416	— 0,307	— 0,222	— 0,157
$4f$	— 0,538	— 0,448	— 0,363	— 0,285	— 0,218	— 0,163	— 0,119

8. Wir können jetzt zur Integration der Differentialgleichungen schreiten:

$$\zeta_{1a}''' + 2\eta\zeta_{1a}'' - 4\zeta_{1a}' = 4f_{1a},$$
$$\zeta_{1b}''' + 2\eta\zeta_{1b}'' - 4\zeta_{1b}' = 4f_{1b},$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\text{für } \eta = 0: \ \zeta_{1a} = 0;\ \zeta_{1a}' = 0;\ \zeta_{1b} = 0;\ \zeta_{1b}' = 0$$
$$\text{für } \eta = \infty: \quad \zeta_{1a}' = 0; \quad \zeta_{1b}' = 0.$$

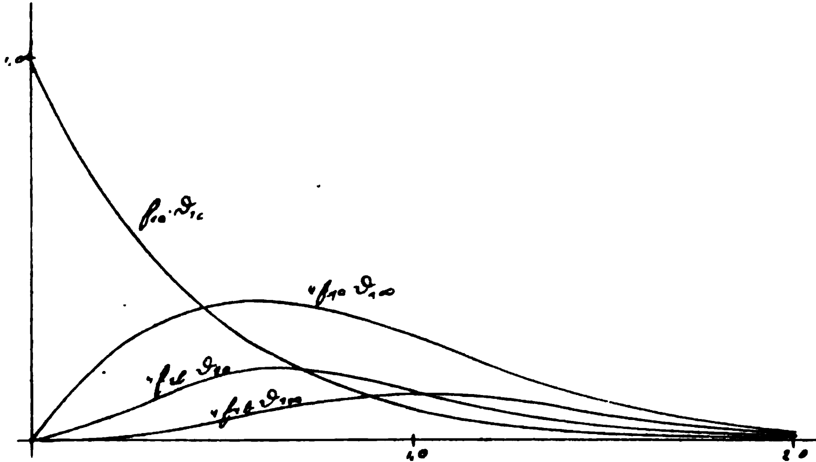


Fig. 8.

Die Integration kann mittels des Kuttaschen[1]) Verfahrens ausgeführt werden, dessen Schema kurz angeführt werden soll.

Der Gleichungstypus ist der folgende:

$$\frac{d^2 F_n}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dF_n}{d\eta} - 4n F_n = K_n(\eta).$$

Diese Differentialgleichung zerlege ich in zwei simultane Differentialgleichungen. Ich setze

$$\frac{dF_n}{d\eta} = y,$$

führe also y als neue Variable ein. Dann wird

$$\frac{d^2 F_n}{d\eta^2} = \frac{dy}{d\eta},$$

sodaß wir folgendes Gleichungssystem haben:

$$\frac{dy}{d\eta} = K_n(\eta) + 4n F_n - 2\eta y$$

$$\frac{dF_n}{d\eta} = y.$$

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 46. p. 435 ff.

Wir schreiben zur Abkürzung:

$$\frac{dy}{d\eta} = Y_1(\eta, F_n, y)$$
$$y = Y_2(\eta, Y_n, y).$$

Ich bilde sodann nach einander die folgenden Ausdrücke:

$$k_1 = Y_1(\eta, F_n, y)h$$
$$l_1 = Y_2(\eta, F_n, y)h$$
$$k_2 = Y_1\left(\eta + \frac{h}{2}, F_n + \frac{k_1}{2}, y + \frac{l_1}{2}\right)h$$
$$l_2 = Y_2\left(\eta + \frac{h}{2}, F_n + \frac{k_1}{2}, y + \frac{l_1}{2}\right)h$$
$$k_3 = Y_1\left(\eta + \frac{h}{2}, F_n + \frac{k_2}{2}, y + \frac{l_2}{2}\right)h$$
$$l_3 = Y_2\left(\eta + \frac{h}{2}, F_n + \frac{k_2}{2}, y + \frac{l_2}{2}\right)h$$
$$k_4 = Y_1(\eta + h, F_n + k_3, y + l_3)h$$
$$l_4 = Y_2(\eta + h, F_n + k_3, y + l_3)h.$$

Diese Ausdrücke kombiniert man zur Bildung neuer in der Weise, daß man setzt:

$$p_1 = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_4) \qquad q_1 = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_4)$$
$$p_2 = \tfrac{1}{2}(k_2 + k_3) \qquad q_2 = \tfrac{1}{2}(l_2 + l_3)$$
$$k = p_2 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) \quad l = q_2 + \tfrac{1}{2}(q_1 - q_2).$$

Bei diesem Resultat sind k und l die Korrektionen, welche an F_n resp. $\frac{dF_n}{d\eta}$ angebracht werden müssen, wenn man η um die Strecke h wachsen läßt. Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist die gleiche wie bei der Simponschen Regel. Die geometrische Darstellung genannten Verfahrens ist durch Fig. 9 gegeben. Zur Ausführung dieses Verfahrens ist nur erforderlich, daß man in dem Punkte, in welchem man anschließen will, die Werte von F_n und $\frac{dF_n}{d\eta}$ kennt. In unserem Problem beginnen wir die Kurven vom Nullpunkt, und in diesem sind uns in der Tat auch die beiden Werte: $F_n(0)$ und $\left(\frac{dF_n}{d\eta}\right)_0$ bekannt.

Es ist offenbar, daß dies Verfahren die Differentialgleichung um so leichter integriert, je größer der Krümmungsradius der Kurve an der zu berechnenden Stelle ist. Von der Kurve ζ_1'

wissen wir nun, daß sie für $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ Null ist, also im einfachsten Falle ein Maximum hat. Dann muß die ζ_1 Kurve, die für $\eta = 0$ ebenfalls gleich Null ist, parabolisch aus dem Nullpunkt herausgehen und sich dann einer endlichen Asymptote nähern; jedenfalls wird, wie das Kurvenbild später auch zeigen wird, die ζ Kurve flacher sein, als die ζ' Kurve. Wir werden daher versuchen, ob wir die Differentialgleichung nicht noch einmal integrieren können. In der Tat ist dies leicht möglich:

$$\zeta''_{1a} + 2\eta\zeta'_{1a} - 6\zeta_{1a} = 4\int_0^\eta f_{1a}\,d\eta + C_{1a}$$

$$\zeta''_{1b} + 2\eta\zeta'_{1b} - 6\zeta_{1b} = 4\int_0^\eta f_{1b}\,d\eta + C_{1b}.$$

Diese Form der Gleichung hat den weiteren Vorzug, daß sie nur die Ableitungen von ζ enthält, die man zu späteren Rechnungen braucht.

Die Integrationskonstanten ergeben sich sofort, wenn man $\eta = 0$ setzt:

$$\zeta''_{1a}(\eta = 0) = C_{1a}; \quad \zeta''_{1b}(\eta = 0) = C_{1b},$$

$\zeta''_{1a}(0)$ und $\zeta''_{1b}(0)$ wären noch zu bestimmen.

Fig. 9.

9. Die Berechnung dieser Größen gelingt mit Hülfe des Greenschen Verfahrens. Wir gehen aus von der ursprünglichen Gleichung:

$$\zeta'''_{1a} + 2\eta\zeta''_{1a} - 4\zeta'_{1a} = 4f_{1a}.$$

Die eingeprägte Kraft $4f_{1a}$ sehen wir als Superposition vieler auf

Strecken $d\bar{\eta}$ wirkender Kräfte (Stöße) an; dies können wir wegen der Linearität der Gleichungen. Der Einfluß, den jeder einzelne Stoß z. B. auf ζ'_{1a} ausübt, ist proportional der Intensität des Stoßes und der Strecke $d\bar{\eta}$, ferner proportional einer Funktion ϑ, die einmal abhängt von der Stelle $\bar{\eta}$, wo der Stoß stattfindet und von der Stelle η, für die die Wirkung des Stoßes zu berechnen ist. Es wird dann:

$$\zeta'_{1a}(\eta) = \int_0^\infty 4f_{1a} \cdot \vartheta(\eta, \bar{\eta})\, d\bar{\eta}$$

sein, d. h. gleich dem Integral über die Einflüsse aller Stöße. Man sieht leicht ein, daß ϑ in η Lösung der homogenen Gleichung sein muß, da ein Stoß $4f_{1a}(\bar{\eta})\, d\bar{\eta}$ nur auf eine plötzliche Aenderung der Integrationskonstanten hinwirken kann. Genau, wie ich ϑ so wählen kann, daß es mir $\zeta'_{1a}(\bar{\eta})$ bestimmt, so läßt es sich augenscheinlich auch so wählen, daß ζ''_{1a} bestimmt wird. Wir suchen aber gerade $\zeta''_{1a}(\eta = 0)$. Wir setzen also:

$$\zeta''_{1a}(\eta = 0) = \int_0^\infty 4f_{1a} \cdot \vartheta \cdot d\eta = \int_0^\infty \vartheta(\zeta'''_{1a} + 2\eta\zeta''_{1a} - 4\zeta'_{1a})\, d\eta.$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\left[\vartheta\zeta''_{1a} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\zeta'_{1a} + 2\eta\vartheta\zeta'_{1a}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \zeta'_{1a}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial\eta\vartheta}{\partial\eta} - 4\vartheta\right) d\eta.$$

Damit rechte und linke Seite der Gleichung identisch werden, muß ϑ der adjungierten Differentialgleichung

$$\vartheta'' - 2\eta\vartheta' - 6\vartheta = 0$$

genügen mit den Grenzbedingungen:

$$\text{für } \eta = 0:\quad \vartheta = -1$$
$$\text{für } \eta = \infty:\quad \vartheta' = 0,\ \vartheta \text{ endlich.}$$

Nun sind die Lösungen der adjungierten Gleichung bestimmt durch die Lösungen der homogenen ursprünglichen Gleichung nach den Formeln:

$$\vartheta = \frac{F_{11}}{F_{12}F'_{11} - F_{11}F'_{12}} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{F_{12}}{F_{12}F'_{11} - F_{11}F'_{12}};$$

F_{11} und F_{12} sind die oben angeführten Lösungen der homogenen Differentialgleichung (s. S. 12 o.). Die Determinante, die im Nenner steht — bezeichnen wir sie mit D —, genügt der Differentialgleichung:

$$D' + 2\eta D = 0.$$

Also

$$D = e^{-\eta^2}.$$

Für ϑ ergibt sich folgende Lösung:

$$\vartheta = \alpha \left[(1 + 2\eta^2)\, e^{\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \eta \right].$$

Das zweite Integral kommt nicht in Betracht, da ϑ im Unendlichen endlich bleiben muß. Die Integrationskonstante α wird durch die Grenzbedingung $\vartheta(0) = -1$ zu

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

bestimmt, so daß ϑ, das zum Unterschied von später zu berechnenden mit ϑ_{10} bezeichnet werden soll, jetzt lautet

$$\vartheta_{10} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[(1 + 2\eta^2)\, e^{\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \eta \right].$$

Mit Hülfe dieser Funktion können wir nun sofort $\zeta''_{1a}(0)$ berechnen. Es ist

$$\zeta''_{1a}(0) = \int_0^{\infty} \vartheta_{10}\, 4 f_{1a}\, d\eta.$$

In ganz analoger Weise ergibt sich für $\zeta''_{1b}(0)$:

$$\zeta''_{1b}(0) = \int_0^{\infty} \vartheta_{10}\, 4 f_{1b}\, d\eta.$$

Führen wir diese Rechnungen aus, so erhalten wir folgende Tabelle (Fig. 6, 7 u. 8):

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ϑ_{10}	− 1	− 0,802	− 0,648	− 0,528	− 0,434	− 0,359	− 0,300
$4 f_{1a} \vartheta_{10}$	4	3,186	2,527	1,995	1,565	1,220	0,943
$4 f_{1b} \vartheta_{10}$	0	0,020	0,063	0,108	0,146	0,170	0,180

η	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
ϑ_{10}	− 0,251	− 0,212	− 0,181	− 0,154	− 0,133	− 0,115	− 0,100
$4 f_{1a} \vartheta_{10}$	0,723	0,549	0,410	0,304	0,222	0,160	0,114
$4 f_{1b} \vartheta_{10}$	0,177	0,165	0,146	0,124	0,102	0,087	0,062

η	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
ϑ_{10}	−0,087	−0,076	−0,067	−0,059	−0,052	−0,047	−0,042
$4f_{1a}\vartheta_{10}$	0,079	0,055	0,037	0,025	0,016	0,010	0,007
$4f_{1b}\vartheta_{10}$	0,047	0,034	0,024	0,017	0,011	0,008	0,005

Durch Integration erhalten wir sodann:

$$\zeta''_{1a}(0) = 1{,}614$$
$$\zeta''_{1b}(0) = 0{,}169.$$

Mittels des Greenschen Verfahrens können wir weitere Grenzbedingungen ausrechnen und zwar die Asymptoten, welchen sich die Kurven ζ_{1a} und ζ_{1b} im Unendlichen anschließen. Wir setzen dem obigen entsprechend:

$$\zeta_{1a}(\infty) = \int_0^\infty \vartheta_{1\infty}(\zeta'''_{1a} + 2\eta\zeta''_{1a} - 4\zeta'_{1a})\,d\eta$$

$$= [\vartheta_{1\infty}\zeta''_{1a} - \vartheta'_{1\infty}\zeta'_{1a} + 2\eta\vartheta_{1\infty}\zeta'_{1a}]_0^\infty + \int_0^\infty \zeta'_{1a}(\vartheta''_{1\infty} - 2\eta\vartheta'_{1\infty} - 6\vartheta_{1\infty})\,d\eta.$$

Da die Grenzenglieder ζ_{1a} noch nicht enthalten, integrieren wir noch einmal partiell:

$$\zeta_{1a}(\infty) = [\vartheta_{1\infty}\zeta''_{1a} - \vartheta'_{1\infty}\zeta'_{1a} + 2\eta\vartheta_{1\infty}\zeta'_{1a}]_0^\infty + [\zeta_{1a}(\vartheta''_{1\infty} - 2\eta\vartheta'_{1\infty} - 6\vartheta_{1\infty})]_0^\infty - \int_0^\infty \zeta_{1a}(\vartheta'''_{1\infty} - 2\eta\vartheta''_{1\infty} - 8\vartheta'_{1\infty})\,d\eta.$$

Wir haben also für $\vartheta_{1\infty}$ die adjungierte Differentialgleichung:

$$\vartheta'''_{1\infty} - 2\eta\vartheta''_{1\infty} - 8\vartheta'_{1\infty} = 0$$

mit den Grenzbedingungen:

für $\eta = 0$: $\vartheta_{1\infty} = 0$

für $\eta = \infty$: $\vartheta''_{1\infty} - 2\eta\vartheta'_{1\infty} - 6\vartheta_{1\infty} = 1$; $\vartheta_{1\infty}$ endlich.

Um diese Gleichung zu lösen, gehen wir von der Gleichung

$$\vartheta''_{1\infty} - 2\eta\vartheta'_{1\infty} - 6\vartheta_{1\infty} = 1$$

aus, deren Lösung

$$\vartheta_{1\infty} = -\tfrac{1}{6} + \alpha\left[\eta + (1+2\eta^2)\,e^{\eta^2}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right]$$

ist, und es ergibt sich aus der Grenzbedingung

$$\vartheta_{1\infty}(0) = 0:$$

$$\alpha = -\frac{1}{3\sqrt{\pi}},$$

sodaß

$$\vartheta_{1\infty} = -\tfrac{1}{6} - \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left[\eta + (1+2\eta^2)\, e^{\eta^2} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta\right].$$

Dies muß aber auch die Lösung der adjungierten Differentialgleichung

$$\vartheta'''_{1\infty} - 2\eta\vartheta''_{1\infty} - 8\vartheta'_{1\infty} = 0$$

sein, da man diese erhält, wenn man

$$\vartheta''_{1\infty} - 2\eta\vartheta'_{1\infty} - 6\vartheta_{1\infty} = 1$$

einmal nach η differentiiert. ϑ_{10} und $\vartheta_{1\infty}$ unterscheiden sich offenbar nur durch einige Konstanten. Es ist

$$\vartheta_{1\infty} = -\tfrac{1}{6}(1+\vartheta_{10}),$$

sodaß man sehr leicht $\vartheta_{1\infty}$ aus ϑ_{10} berechnen kann. Wir haben damit

$$\zeta_{1a}(\eta = \infty) = \int_0^{\infty} \vartheta_{1\infty} \,.\, 4 f_{1a}\, d\eta$$

und ganz entsprechend:

$$\zeta_{1b}(\eta = \infty) = \int_0^{\infty} \vartheta_{1\infty} \,.\, 4 f_{1b}\, d\eta.$$

Diese Werte sind zur Lösung unserer Differentialgleichung von ζ_{1a} und ζ_{1b} nicht erforderlich, wohl aber geben sie eine willkommene Kontrolle der gefundenen Kurven und haben als solche einen wohlberechtigten Wert. Die numerische Berechnung gibt folgende Werte: (Fig. 7 u. 8).

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\vartheta_{1\infty}$	0	— 0,033	— 0,059	— 0,079	— 0,094	— 0,107	— 0,117
$4f_{1a}\vartheta_{1\infty}$	0	0,131	0,229	0,297	0,340	0,363	0,368
$4f_{1b}\vartheta_{1\infty}$	0 .	0,001	0,006	0,016	0,032	0,051	0,070

η	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\vartheta_{1\infty}$	— 0,125	— 0,131	— 0,137	— 0,141	— 0,145	— 0,147	— 0,150
$4f_{1a}\vartheta_{1\infty}$	0,359	0,339	0,310	0,277	0,242	0,206	0,179
$4f_{1b}\vartheta_{1\infty}$	0,088	0,102	0,110	0,113	0,111	0,104	0,09 8

η	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\vartheta_{1\infty}$	— 0,152	— 0,154	— 0,156	— 0,157	— 0,158	— 0,159	— 0,160
$4f_{1a}\vartheta_{1\infty}$	0,139	0,110	0,086	0,065	0,048	0,035	0,025
$4f_{1b}\vartheta_{1\infty}$	0,082	0,069	0,056	0,045	0,035	0,026	0,019

Durch Integration erhalten wir dann:

$$\zeta_{1a}(\eta = \infty) = \int_0^\infty \vartheta_{1\infty} \cdot 4f_{1a}\, d\eta = 0{,}413$$

$$\zeta_{1b}(\eta = \infty) = \int_0^\infty \vartheta_{1\infty} \cdot 4f_{1b}\, d\eta = 0{,}123.$$

Wir kennen jetzt von unseren sechs Kurven $\zeta''_{1a}, \zeta'_{1a}, \zeta_{1a}, \zeta''_{1b}, \zeta'_{1b}, \zeta_{1b}$ teils durch gegebene Grenzbedingungen, teils durch mit dem Greenschen Verfahren berechnete, alle Randwerte im Punkte $\eta = 0$ und im Unendlichen:

$$\begin{array}{llll} \text{für } \eta = 0: & \zeta''_{1a} = 1{,}614; & \zeta''_{1b} = 0{,}169; \\ & \zeta'_{1a} = 0 \quad ; & \zeta'_{1b} = 0 \\ & \zeta_{1a} = 0 \quad ; & \zeta_{1b} = 0 \\ \text{für } \eta = \infty: & \zeta''_{1a} = 0 \quad ; & \zeta''_{1b} = 0 \\ & \zeta'_{1a} = 0 \quad ; & \zeta'_{1b} = 0 \\ & \zeta_{1a} = 0{,}413; & \zeta_{1b} = 0{,}123. \end{array}$$

10. Jetzt können wir zur Integration der Differentialgleichungen schreiten:

$$\zeta''_{1a} + 2\eta\zeta'_{1a} - 6\zeta_{1a} = \int_0^\infty 4f_{1a}\, d\eta + 1{,}614 = 4\mathfrak{f}_{1a}$$

$$\zeta''_{1b} + 2\eta\zeta'_{1b} - 6\zeta_{1b} = \int_0^\infty 4f_{1b}\, d\eta + 0{,}169 = 4\mathfrak{f}_{1b}.$$

Die Werte von $\mathfrak{f}_{1a}$ und $\mathfrak{f}_{1b}$ sind leicht zu finden und sollen daher nicht 'besonders angegeben werden. Wir wenden nun auf die

Differentialgleichungen das oben angegebene Kuttasche Verfahren an, wobei wir wieder

$$h = 0{,}1$$

annehmen. Wir erhalten so die Werte von ζ_1 und ζ_1'.

11. Es gilt nun aus ζ_{1a}' und ζ_{1b}' durch Differentiation die zweiten Ableitungen zu finden. Die numerische Differentiation wurde mit Hülfe der Differenzenrechnung ausgeführt. Auch diese Methode[1]) sei kurz angeführt.

Die Kurve $\zeta(\eta)$ sei als Funktion von η in den Punkten 0, 0,1, 0,2 u. s. f. bekannt. Will man nun für ζ eine angenäherte Kurve finden, die differentüert werden kann, so schreibe man für den Punkt, für den man die Ableitung haben will, die folgende Entwicklung an:

$$\begin{aligned}\zeta = a_0 + a_1 h + \frac{a_2}{2!} h(h-0{,}1) + \frac{a_3}{3!}(h+0{,}1)h(h-0{,}1) \\ + \frac{a_4}{4!}(h+0{,}1)h(h-0{,}1)(h-0{,}2) \\ + \frac{a_5}{5!}(h+0{,}2)(h+0{,}1)h(h-0{,}1)(h-0{,}2) \\ + \cdots\end{aligned}$$

h ist dabei Abszisse, wenn man das Koordinatensystem in den Punkt legt, um den man entwickelt. Die Koeffizienten a_ν sind vorläufig noch unbekannt, sie lassen sich aber leicht durch Differenzenbildung bestimmen. Bezeichnen wir:

$$\begin{aligned}\varDelta\zeta &= \zeta(\eta_0) - \zeta(h-0{,}1) \\ \delta\zeta &= \zeta(h+0{,}1) - \zeta(\eta_0).\end{aligned}$$

Der Index 0 bezeichnet dabei den Wert von η, in dem der neue Anfangspunkt liegt. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}\varDelta\zeta &= a_1 + \frac{a_2}{2!}0{,}2(h-0{,}1) + \frac{a_3}{3!}0{,}3h(h-0{,}1) + \frac{a_4}{4!}0{,}4h(h-0{,}1)(h-0{,}2) \\ &\quad + \frac{a_5}{5!}0{,}5(h+0{,}1)h(h-0{,}1)(h-0{,}2) + \cdots \\ \delta\varDelta\zeta &= 0{,}1 . a_2 \quad + 0{,}1\frac{a_3}{2!}0{,}2h \quad + 0{,}1\frac{a_4}{3!}0{,}3h(h-0{,}1) \\ &\quad + 0{,}1\frac{a_5}{4!}0{,}4(h+0{,}1)h(h-0{,}1) + \cdots \\ \varDelta\delta\varDelta\zeta &= \quad + (0{,}1)^2 a_3 \quad + (0{,}1)^2\frac{a_4}{2!}0{,}2(h-0{,}1)\end{aligned}$$

1) C. Runge, Nature, Bd. 60 p. 365.

$$+(0{,}1)^2\,\frac{a_5}{3!}\,0{,}3\,h(h-0{,}1)+\cdots$$

$$\delta\Delta\delta\Delta\zeta = \qquad +(0{,}1)^3 a_4+(0{,}1)^3\,\frac{a_5}{2!}\,0{,}2\,h+\cdots$$

$$\Delta\delta\Delta\delta\Delta\zeta = \qquad +(0{,}1)^4 a_5+\cdots$$

Daraus ergeben sich sofort die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \zeta(h=0) &&= m_0\\
a_1 &= \Delta\zeta(h=0{,}1) &&= m_1\\
0{,}1\,a_2 &= \delta\Delta\zeta(h=0) &&= m_2\\
(0{,}1)^2 a_3 &= \Delta\delta\Delta\zeta(h=0{,}1) &&= m_3\\
(0{,}1)^3 a_4 &= \delta\Delta\delta\Delta\zeta(h=0) &&= m_4\\
(0{,}1)^4 a_5 &= \Delta\delta\Delta\delta\Delta\zeta(h=0{,}1) &&= m_5.
\end{aligned}$$

Diese Koeffizienten sind dann leicht aus folgendem Differenzenschema zu entnehmen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\zeta(h=-0{,}3) & \zeta(h=-0{,}2) & \zeta(h=-0{,}1) & \underline{\zeta(h=0)} & \zeta(h=0{,}1) & \zeta(h=0{,}2) & \zeta(h=0{,}3)\\
 & & & \searrow & & & \\
\Delta\zeta(-0{,}2) & \Delta\zeta(-0{,}1) & \Delta\zeta(0) & \underline{\Delta\zeta(0{,}1)} & \Delta\zeta(0{,}2) & \Delta\zeta(0{,}3) & \\
 & & & \swarrow & & & \\
\delta\Delta\zeta(-0{,}3) & \delta\Delta\zeta(-0{,}2) & \delta\Delta\zeta(-0{,}1) & \underline{\delta\Delta\zeta(0)} & \delta\Delta\zeta(0{,}1) & \delta\Delta\zeta(0{,}2) & \\
 & & & \searrow & & & \\
\Delta\delta\Delta\zeta(-0{,}2) & \Delta\delta\Delta\zeta(-0{,}1) & \Delta\delta\Delta\zeta(0) & \underline{\Delta\delta\Delta\zeta(0{,}1)} & \Delta\delta\Delta\zeta(0{,}2) & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
\delta\Delta\delta\Delta\zeta(-0{,}2) & \delta\Delta\delta\Delta\zeta(-0{,}1) & \underline{\delta\Delta\delta\Delta\zeta(0)} & \delta\Delta\delta\Delta\zeta(0{,}1) & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & \swarrow & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & &
\end{array}$$

Die durch Unterstreichen hervorgehobenen Glieder sind unsere Koeffizienten. Nun ist es auch leicht, von ζ die Ableitung zu bilden. Dazu ist nur nötig, ζ nach h zu differentiieren. Im Punkte $h=0$ haben wir also:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\zeta}{dh}\right)_{h=0} &= a_1+\frac{a_2}{2!}(-0{,}1)+\frac{a_3}{3!}(0{,}1)(-0{,}1)+\frac{a_4}{4!}(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}2)\\
&\qquad +\frac{a_5}{5!}(0{,}2)(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}2)+\cdots\\
&= a_1-\frac{0{,}1}{2!}\,a_2-\frac{(0{,}1)^2}{3!}\,a_3+\frac{(0{,}1)^2.0{,}2}{4!}\,a_4\\
&\qquad +\frac{(0{,}1)^2.(0{,}2)^2}{5!}\,a_5+\cdots
\end{aligned}$$

$$= m_1 - \frac{m_2}{2!} - \frac{m_3}{3!} + \frac{2m_4}{4!} + \frac{4m_5}{5!} - - + + \cdots$$

Die Koeffizienten m sind dann genau die hervorgehobenen Differenzen obigen Schemas. Unsere Rechnung verlangt nun nicht die Ableitung von ξ sondern von ξ', die aber genau nach demselben Schema ausgeführt wird.

Die letztgenannte Gleichung kann man noch etwas symmetrischer gestalten, indem man nicht als erste Differenz die Operation Δ sondern δ nimmt. Die Koeffizienten nehmen dann die Form an:

$$\begin{aligned}
a_0' &= \xi(h = 0) &&= m_0' = m_0 \\
a_1' &= \delta\xi(h = -0{,}1) &&= m_1' &&= \Delta\xi(0) \\
0{,}1\, a_2' &= \Delta\delta\xi(h = 0) &&= m_2' = m_2 \\
(0{,}1)^2 a_3' &= \delta\Delta\delta\xi(h = -0{,}1) &&= m_3' &&= \Delta\delta\Delta\xi(0) \\
(0{,}1)^3 a_4' &= \Delta\delta\Delta\delta\xi(h = 0) &&= m_4' = m_4 \\
(0{,}1)^4 a_5' &= \delta\Delta\delta\Delta\delta\xi(h = -0{,}1) &&= m_5' &&= \Delta\delta\Delta\delta\Delta\xi(0).
\end{aligned}$$

Man sieht, in dem Differenzenschema ist der Koeffizientenzug dem vorher gefundenen symmetrisch. Es ist dann noch:

$$\left(\frac{\delta\xi}{dh}\right)_{h=0} = m_1' - \frac{m_2'}{2!} - \frac{m_3'}{3!} + \frac{2m_4'}{4!} + \frac{4m_5'}{5} - \cdots$$

Um die beiden Ausdrücke für $\left(\frac{\partial\xi}{\partial h}\right)_{h=0}$ zu einem zu verschmelzen, addieren wir diese Gleichung zu der obigen und dividieren durch 2:

$$\left(\frac{d\xi}{dh}\right)_{h=0} = M_1 - \frac{M_2}{2!} - \frac{M_3}{3!} + \frac{2M_4}{4!} + \frac{4M_5}{5!} + \cdots$$

wobei

$$M_\nu = \frac{m_\nu + m_\nu'}{2}$$

ist. Durch diese Operation bekommen die Koeffizienten im obigen Schema die folgende symmetrische Lage:

$$\begin{array}{ccc}
\xi(-0{,}1) & \underline{\xi(0)} & \xi(+0{,}1) \\
m_1' & \underline{M_1} & m_1 \\
 & \underline{m_2} = M_2 & \\
m_3' & \underline{M_3} & m_3 \\
 & \underline{m_4} = M_4 & \\
m_5' & \underline{M_5} & m_5.
\end{array}$$

Mit Hülfe genannter Methode kann man den Differentialquotient einer Kurve mit der überhaupt erreichbaren Genauigkeit finden.

Die ersten Punkte von ζ'', d. h. für $\eta = 0{,}1$, $0{,}2$ ... die sich nicht mit dieser Methode finden lassen, falls man für negative η die Werte von ζ' nicht kennt, kann man durch Reihenentwicklung um $\eta = 0$ leicht finden, da man offenbar alle höheren Ableitungen von ζ im Punkte $\eta = 0$ berechnen kann.

Man kann nun in Vollständigkeit die ζ_1-Kurven aufstellen (Fig. 10):

η	ζ_{1a}	ζ'_{1a}	ζ''_{1a}	ζ_{1b}	ζ'_{1b}	ζ''_{1b}
0	0	0	1,614	0	0	0,169
0,1	0,007	0,142	1,230	0,001	0,017	0,170
0,2	0,027	0,246	0,872	0,003	0,034	0,170
0,3	0,055	0,318	0,573	0,008	0,051	0,164
0,4	0,089	0,362	0,310	0,013	0,066	0,149
0,5	0,126	0,382	0,092	0,021	0,080	0,126
0,6	0,164	0.382	— 0,081	0,029	0,091	0,094
0,7	0,201	0,367	— 0,213	0,039	0,099	0,057
0,8	0,237	0,340	— 0,305	0,049	0,103	0,017
0,9	0,269	0,307	— 0,360	0,059	0,102	— 0,021
1,0	0,298	0,269	— 0,384	0,069	0,099	— 0,055
1,1	0,323	0,231	— 0,396	0,079	0,092	— 0,081
1,2	0,344	0,191	— 0,367	0,087	0,083	— 0,100
1,3	0,362	0,158	— 0,335	0,095	0,072	— 0,109
1,4	0,376	0,126	— 0,298	0,102	0,061	— 0,111
1,5	0,387	0,099	— 0,253	0,107	0,050	— 0,107
1,6	0,396	0,075	— 0,210	0,112	0,040	— 0,098
1,7	0,402	0,056	— 0,169	0,115	0,031	— 0,086
1,8	0,407	0,041	— 0,135	0,118	0,023	— 0,072
1,9	0,411	0,029	— 0,126	0,120	0,016	— 0,059
2,0	0,413	0,021	— 0,074	0,121	0,011	— 0,041

Aus diesen Kurven sehen wir bereits die Möglichkeit ein, daß Ablösung eintritt. Die Stromlinien enthalten ja die Kurven ζ''_{1a} und ζ''_{1b}, welche negativ werden. Also besteht die Wahrscheinlichkeit, daß negative Stromlinien auftreten. Diese aber liegen gerade inmitten der Grenzschicht.

12. Es gibt noch einen zweiten Weg, auf dem es möglich ist die Differentialgleichungen

$$\zeta_n''' + 2\eta\zeta_n'' - 4n\,\zeta_n' = 4f_n(\eta)$$

zu integrieren. Differentiiere ich nämlich $2n$ mal nach η, so erhalte ich

$$\zeta_n^{(2n+3)} + 2\eta\zeta_n^{(2n+2)} = 4f_n^{(2n)}.$$

Die exakte Lösung ist

$$\zeta_n^{(2n+2)} = e^{-\eta^2}\int^{\eta} e^{\eta^2}.4f_n^{(2n)}\,d\eta.$$

Durch mehrmalige Integration kann ich dann ζ_n'', ζ_n', ζ_n gewinnen. Die Integrationskonstanten sind mir bekannt, da ich für $\eta = 0$ den Wert jeder Ableitung von f_n bestimmen kann.

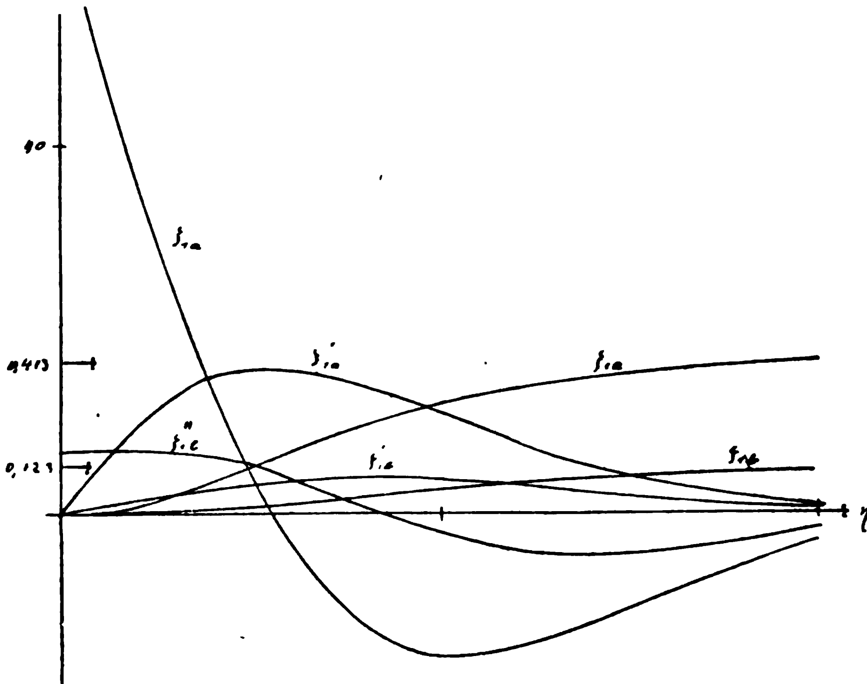


Fig 10..

Um nun nicht gezwungen zu sein, bei dieser Rechnung f_n $2n$ mal zu differentiieren, so suche ich das gewonnene Resultat durch partielle Integration umzuformen.

$$\zeta_n^{(2n+2)} = e^{-\eta^2}[e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-1)} - \int 2\eta e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-1)}d\eta],$$

$$\int 2\eta e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-1)}\,d\eta = [2\eta e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-2)} - \int 2e^{\eta^2}(1+2\eta^2).4f^{(2n-2)}d\eta]$$

$$\int 2(1+2\eta^2)\,e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-3)}\,d\eta = \Big[2(1+2\eta^2)e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-3)} - \int\Big(2\eta(1+2\eta^2) + 8\eta\Big)e^{\eta^2}.4f_n^{(2n-3)}\,d\eta\Big]$$

. . . .

$$\zeta_n^{(2n+2)} = 4f_n^{(2n-1)} - 2\eta.4f_n^{(2n-2)} + 2(1+2\eta^2).4f_n^{(2n-3)} - 4(3\eta+2\eta^3).4f_n^{(2n-4)}$$
$$+-+\cdots - e^{-\eta^2}\int^{\eta}(\text{rationale Funktion von } \eta)\; e^{\eta^2}\,4f_n\,d\eta.$$

Wendet man dann dies für jedes einzelne Glied, in welchem die Ableitung von f_n mit einer rationalen Funktion von η multipliziert auftritt, an, so kann man schließlich die gewünschte Ableitung von ζ_n erhalten, ohne f_n differentiieren zu müssen. Für $n = 2$ z. B. erhielte man:

$$\zeta^{(6)} = 4f''' - 2\eta.4f'' + 2(1+2\eta^2).4f' - 4(3\eta+2\eta^3).4f + e^{-\eta^2}\int^{\eta}(3+12\eta^2+4\eta^4)\,e^{\eta^2}\,4f\,d\eta$$

$$\zeta^{(5)} = 4f'' - \Big[2\eta.4f' - 2\int^{\eta}4f'\,d\eta\Big] + \Big[2(1+2\eta^2).4f - 2\int 4\eta\,4f\,d\eta\Big] - \int^{\eta}4(3\eta+2\eta^3).4f\,d\eta + \int^{\eta}e^{-\eta^2}\,d\eta\int^{\eta}(3+12\eta^2+4\eta^4)\,e^{\eta^2}\,4f\,d\eta$$
$$= 4f'' - 2\eta.4f' + 4(1+\eta^2).4f - \int^{\eta}4(5\eta+2\eta^3).4f\,d\eta + \int^{\eta}e^{-\eta^2}\,d\eta\int^{\eta}(\ldots)\,e^{\eta^2}\,4f\,d\eta$$

$$\zeta^{(4)} = 4f' - 2\eta.4f + \int^{\eta}2(3+2\eta^2)\,4f\,d\eta - \int d\eta\int\cdots + \iiint\cdots \quad \text{u. s. f.}$$

Man sieht, daß diese Methode besonders für größere Werte von n weit komplizierter ist, als das Kuttasche Verfahren.

13. Wir wenden uns nun der Berechnung von χ_2 zu, die ganz analog der vorhergehenden zu führen ist. χ_2 genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^3\chi_2}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\chi_2}{\partial\eta^2} - 8\frac{\partial\chi_2}{\partial\eta} = \frac{4}{r}\left\{\frac{\partial\chi_0}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}\right] - \frac{\partial\chi_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\chi_0}{\partial\eta}\right] - \frac{\partial\chi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\chi_0}{\partial\eta^2}\right\}.$$

Führen wir für χ_0 und χ_1 die entsprechenden Werte ein:

$$\chi_0 = r\bar{u}\zeta_0,\quad \chi_1 = r\bar{u}\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\,\zeta_{1a} + \bar{u}^2\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\zeta_{1b},$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\partial^3 \chi_2}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \eta^2} - 8 \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} =$$

$$4 \left\{ r\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 (\zeta_0' \zeta_{1a}' - \zeta_0 \zeta_{1a}'' + \zeta_0' \zeta_{1a}' - \zeta_0'' \zeta_{1a}) \right.$$

$$+ r\bar{u}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} (\zeta_{1a}' \zeta_0' - \zeta_0'' \zeta_{1a})$$

$$+ \bar{u}^2 \; \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} (-\zeta_0 \zeta_{1a}'' - \zeta_0 \zeta_{1b}'' + 3\zeta_0' \zeta_{1b}' - \zeta_0'' \zeta_{1a\,0\,a}' - 2\zeta_0'' \zeta_{1b})$$

$$+ \bar{u}^3 \; \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} (\zeta_0' \zeta_{1b}' - \zeta_0'' \zeta_{1b})$$

$$\left. + \bar{u}^3 \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 (-\zeta_0' \zeta_{1b}' - \zeta_0 \zeta_{1b}'') \right\},$$

sodaß wir zu setzen haben:

$$\chi_2 = r\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \zeta_{2a} + r\bar{u}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \zeta_{2b} + \bar{u}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \zeta_{2c} + \bar{u}^3 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \zeta_{2d}$$
$$+ \bar{u}^3 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \zeta_{2e}.$$

Dabei hat ζ_2 folgenden Gleichungen zu genügen:

$$\zeta_{2a}''' + 2\eta \zeta_{2a}'' - 8\zeta_{2a}' = 4 \{ 2\zeta_0' \zeta_{1a}' - \zeta_0 \zeta_{1a}'' - \zeta_0'' \zeta_{1a} \} = 4 f_{2a}$$
$$\zeta_{2b}''' + 2\eta \zeta_{2b}'' - 8\zeta_{2b}' = 4 \{ \zeta_{1a}' \zeta_0' - \zeta_0'' \zeta_{1a} \} = 4 f_{2b}$$
$$\zeta_{2c}''' + 2\eta \zeta_{2c}'' - 8\zeta_{2c}' = 4 \{ -\zeta_0 \zeta_{1a}'' - \zeta_0 \zeta_{1b}'' + 3\zeta_0' \zeta_{1b}' - \zeta_0'' \zeta_{1a} - 2\zeta_0'' \zeta_{1b} \} = 4 f_{2c}$$
$$\zeta_{2d}''' + 2\eta \zeta_{2d}'' - 8\zeta_{2d}' = 4 \{ \zeta_0' \zeta_{1b}' - \zeta_0''' \zeta_{1b} \} = 4 f_{2d}$$
$$\zeta_{2e}''' + 2\eta \zeta_{2e}'' - 8\zeta_{2e}' = 4 \{ -\zeta_0' \zeta_{1b}' - \zeta_0 \zeta_{1b}'' \} = 4 f_{2e}$$

mit den Grenzbedingungen:

für $\eta = 0$: $\zeta_{2a} = 0; \quad \zeta_{2a}' = 0$
$\zeta_{2b} = 0; \quad \zeta_{2b}' = 0$
$\zeta_{2c} = 0; \quad \zeta_{2c}' = 0$
$\zeta_{2d} = 0; \quad \zeta_{2d}' = 0$
$\zeta_{2e} = 0; \quad \zeta_{2e}' = 0$

für $\eta = \infty$: $\zeta_{2a}' = 0; \quad \zeta_{2b}' = 0; \quad \zeta_{2c}' = 0; \quad \zeta_{2d}' = 0; \quad \zeta_{2e}' = 0.$

Über die numerische Integration ist genau das gleiche zu sagen wie oben. Wir berechnen zunächst $\zeta_2'(\eta = 0)$ und $\zeta_2(\eta = \infty)$. Diesmal stellen sich die Einflußkoeffizienten ϑ_{20} und $\vartheta_{2\infty}$ durch folgende Gleichungen dar:

$$\vartheta_{20} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left\{ (5\eta + 2\eta^3) + (3 + 12\eta^2 + 4\eta^4)\, e^{\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}$$

$$\vartheta_{2\infty} = -\frac{1}{10} \{ 1 + \vartheta_{20} \}.$$

Die weiteren Rechnungen sollen nicht ausgeführt werden, da sie analog den früheren sind. Das Resultat ist folgendes:

$$\begin{aligned}
\zeta''_{2a}(\eta = 0) &= -0{,}248 & \zeta_{2a}(\eta = \infty) &= -0{,}233\\
\zeta''_{2b}(\eta = 0) &= -0{,}068 & \zeta_{2b}(\eta = \infty) &= -0{,}043\\
\zeta''_{2c}(\eta = 0) &= -0{,}029 & \zeta_{2c}(\eta = \infty) &= -0{,}142\\
\zeta''_{2d}(\eta = 0) &= -0{,}022 & \zeta_{2d}(\eta = \infty) &= -0{,}023\\
\zeta''_{2e}(\eta = 0) &= 0{,}036 & \zeta_{2e}(\eta = \infty) &= 0{,}018.
\end{aligned}$$

Man ersieht schon aus diesen Randwerten, daß der Typus der Kurven ganz ähnlich dem sein wird, der schon bei ζ_1 auftrat; nur daß bei ζ_2 die Kurven flacher zu werden scheinen. Um die Differentialgleichungen integrieren zu können, brauchen wir noch die Zahlenwerte der eingeprägten Kräfte. Dieselben sind in der nächsten Tabelle zusammengestellt, in der auch ϑ_{20} und $\vartheta_{2\infty}$ zahlenmäßig angegeben sind (Fig. 11):

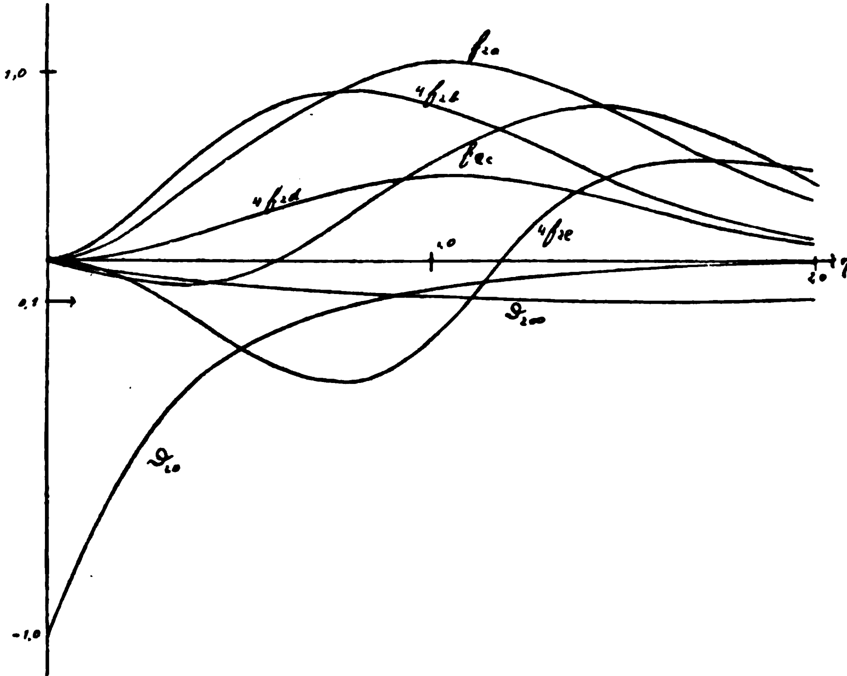


Fig. 11.

η	$4f_{2a}$	$4f_{2b}$	$4f_{2c}$	$4f_{2d}$	$4f_{2e}$	ϑ_{20}	$\vartheta_{2\infty}$
0	0	0	0	0	0	— 1	0
0,1	0,068	0,032	— 0,048	0,004	— 0,011	— 0,744	— 0,026

η	$4f_{2a}$	$4f_{2b}$	$4f_{2c}$	$4f_{2d}$	$4f_{2e}$	ϑ_{20}	$\vartheta_{2\infty}$
0,2	0,244	0,103	— 0,154	0,015	— 0,046	— 0,558	— 0,044
0,3	0,494	0,191	— 0,236	0,035	— 0,099	— 0,423	— 0,058
0,4	0,787	0,277	— 0,265	0,062	— 0,166	— 0,323	— 0,068
0,5	1,093	0,350	— 0,206	0,094	— 0,235	— 0,248	— 0,075
0,6	1,386	0,403	— 0,051	0,128	— 0,292	— 0,193	— 0,081
0,7	1,645	0,435	0,190	0,160	— 0,326	— 0,151	— 0,085
0,8	1,851	0,445	0,490	0,188	— 0,327	— 0,119	— 0,088
0,9	1,994	0,437	0,814	0,207	— 0,292	— 0,094	— 0,091
1,0	2,064	0,412	1,119	0,217	— 0,226	— 0,075	— 0,092
1,1	2,064	0.377	1,384	0,217	— 0,137	— 0,060	— 0,094
1,2	1,993	0,335	1,577	0,207	— 0,038	— 0,049	— 0,095
1,3	1,879	0,288	1,665	0,190	0,060	— 0,040	— 0,096
1,4	1,719	0,241	1,689	0,167	0,145	— 0,032	— 0,097
1,5	1,530	0,198	1,649	0,142	0,210	— 0,027	— 0,097
1,6	1,323	0,156	1,528	0,116	0,251	— 0,022	— 0,098
1,7	1,111	0,121	1,359	0,091	0,269	— 0,018	— 0,098
1,8	0,913	0,091	1,181	0,069	0,268	— 0,015	— 0,099
1,9	0,732	0,067	0,977	0,049	0,253	— 0,012	— 0,099
2,0	0,575	0,049	0,769	0,033	0,230	— 0,011	— 0,099

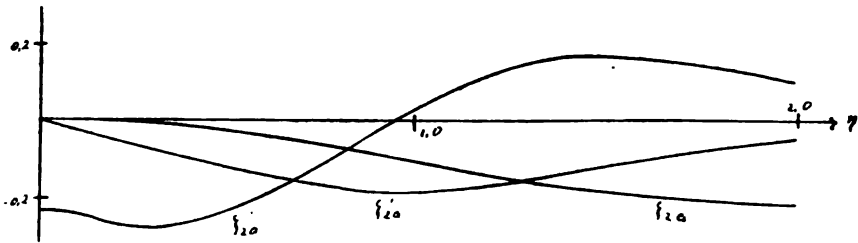


Fig. 12.

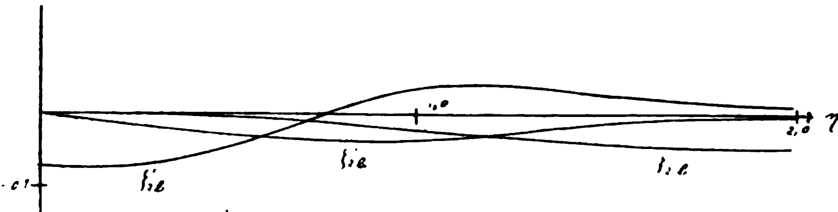


Fig. 13.

Sofort können wir nun die Differentialgleichungen integrieren, indem wir zuvor

$$\zeta_2''' + 2\eta\zeta_2'' - 8\zeta_2' = 4f_2$$

einmal nach η integrieren:

$$\zeta_2'' + 2\eta\zeta_2' - 10\zeta_2 = \int_0^\eta 4f_2\,d\eta + \zeta_2''(0) = 4\mathfrak{f}_2.$$

Wir wenden wie oben auf die Differentialgleichung das Kuttasche Verfahren an und berechnen die ζ und ζ'. Das Resultat ist das folgende (Fig. 12—16):

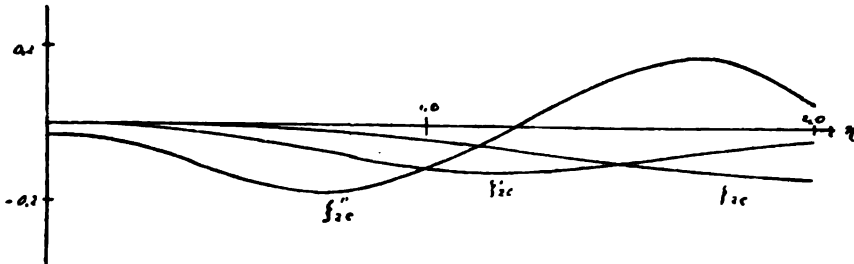


Fig. 14.

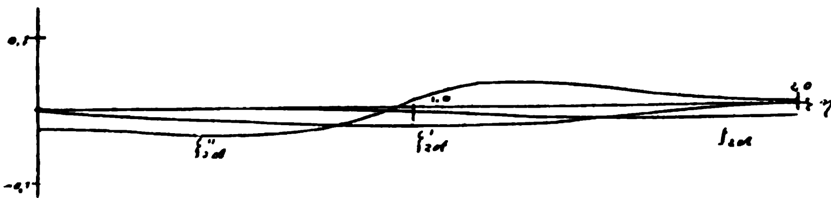


Fig. 15.

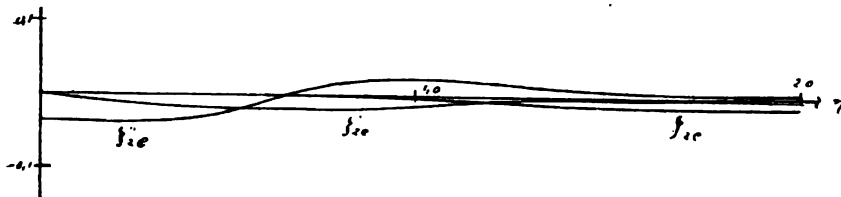


Fig. 16.

η	ζ_{a}	ζ'_{2a}	ζ''_{2a}	ζ_{2b}	ζ'_{2b}	ζ''_{2b}
0,1	— 0,001	— 0,019	— 0,253	— 0,000	— 0,007	— 0,069
0,2	— 0,005	— 0,046	— 0,280	— 0,001	— 0,014	— 0,069
0,3	— 0,011	— 0,077	— 0,289	— 0,003	— 0,020	— 0,064
0,4	— 0,020	— 0,103	— 0,271	— 0,005	— 0,026	— 0,056
0,5	— 0,032	— 0,127	— 0,230	— 0,008	— 0,031	— 0,042
0,6	— 0,046	— 0,148	— 0,193	— 0,012	— 0,035	— 0,027
0,7	— 0,061	— 0,165	— 0,143	— 0,015	— 0,037	— 0,011
0,8	— 0,079	— 0,177	— 0,089	— 0,019	— 0,037	0,004
0,9	— 0,097	— 0,183	— 0,031	— 0,023	— 0,036	0,017
1,0	— 0,113	— 0,183	0,281	— 0,026	— 0,034	0,027
1,1	— 0,133	— 0,177	0,080	— 0,029	— 0,031	0,034
1,2	— 0,150	— 0,167	0,121	— 0,032	— 0,027	0,039
1,3	— 0,166	— 0,154	0,152	— 0,035	— 0,023	0,039
1,4	— 0,181	— 0,137	0,172	— 0,037	— 0,019	0,037
1,5	— 0,194	— 0,119	0,181	— 0,039	— 0,016	0,032
1,6	— 0,205	— 0,101	0,179	— 0,040	— 0,013	0,029
1,7	— 0,214	— 0,084	0,170	— 0,041	— 0,010	0,025
1,8	— 0,222	— 0,068	0,154	— 0,042	— 0,008	0,020
1,9	— 0,228	— 0,053	0,134	— 0,043	— 0,006	0,016
2,0	— 0,232	— 0,041	0,113	— 0,043	— 0,005	0,018

η	ζ_{2c}	ζ'_{2c}	ζ''_{2c}	ζ_{2d}	ζ'_{2d}	ζ''_{2d}
0,1	— 0,000	— 0,002	— 0,032	— 0,000	— 0,002	— 0,023
0,2	— 0,001	— 0,006	— 0,044	— 0,001	— 0,005	— 0,026
0,3	— 0,002	— 0,012	— 0,072	— 0,001	— 0,008	— 0,031
0,4	— 0,003	— 0,020	— 0,105	— 0,002	— 0,011	— 0,035
0,5	— 0,006	— 0,033	— 0,136	— 0,003	— 0,013	— 0,036
0,6	— 0,010	— 0,047	— 0,159	— 0,005	— 0,016	— 0,036

η	ζ_{2c}	ζ'_{2c}	ζ''_{2c}	ζ_{2d}	ζ'_{2d}	ζ''_{2}
0,7	— 0,015	— 0,065	— 0,182	— 0,007	— 0,019	— 0,032
0,8	— 0,023	— 0,083	— 0,180	— 0,009	— 0,021	— 0,025
0,9	— 0,032	— 0,100	— 0,160	— 0,011	— 0,022	— 0,011
1,0	— 0,043	— 0,114	— 0,116	— 0,013	— 0,023	0,008
1,1	— 0,055	— 0,123	— 0,071	— 0,015	— 0,021	0,026
1,2	— 0,067	— 0,128	— 0,017	— 0,018	— 0,018	0,037
1,3	— 0,080	— 0,126	0,045	— 0,019	— 0,014	0,041
1,4	— 0,092	— 0,119	0,094	— 0,020	— 0,010	0,036
1,5	— 0,104	— 0,108	0,140	— 0,021	— 0,007	0,024
1,6	— 0,114	— 0,092	0,165	— 0,021	— 0,005	0,017
1,7	— 0,122	— 0,075	0,172	— 0,022	— 0,004	0,013
1,8	— 0,129	— 0,058	0,163	— 0,022	— 0,003	0,010
1,9	— 0,133	— 0,044	0.108	— 0,022	— 0,002	0,007
2,0	— 0,138	— 0,037	0,062	— 0,022	— 0,001	0,005

η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ_{2e}	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,006
ζ'_{2e}	0,004	0,007	0,011	0,014	0,017	0,018
ζ''_{2e}	0,037	0,040	0,041	0,035	0,022	0,005

η	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
ζ_{2e}	0,008	0,010	0,011	0,013	0,013	0,014	0,015
ζ'_{2e}	0,018	0,017	0,014	0,011	0,008	0,006	0,004
ζ''_{2e}	— 0,010	— 0,020	— 0,028	— 0,031	— 0,028	— 0,019	— 0,014

η	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
ζ_{2e}	0,015	0,016	0,017	0,017	0,017	0,017	0,018
ζ'_{2e}	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000
ζ''_{2e}	— 0,011	— 0,007	— 0,005	— 0,003	— 0,003	— 0,002	— 0,001

Man sieht, daß die Kurven ζ_2 bereits sehr flach werden, und es wird daher nicht erforderlich sein, daß wir weitere ζ ausrechnen. Es soll nur noch der Wert von $\zeta_3''(\eta = 0)$ bestimmt werden; dieser ist wieder leicht durch das Greensche Verfahren gefunden. Wir können mit Hülfe dieser Koeffizienten für die Ablösungszeit und für die Ablösungsstelle eine größere Genauigkeit erreichen. Wir haben zunächst die Differentialgleichungen für ζ_3 aufzustellen und gehen dazu aus von der Gleichung für χ_3. Es ist

$$\frac{\partial^3\chi_3}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\chi_3}{\partial\eta^2} - 12\frac{\partial\chi_3}{\partial\eta}$$

$$= \frac{4}{r}\left\{\frac{\partial\chi_0}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\chi_2}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial\chi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial\eta^2}\right.$$

$$+ \frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\chi_1}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial\chi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\eta^2}$$

$$\left. + \frac{\partial\chi_2}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\chi_0}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial\chi_2}{\partial x}\frac{\partial^2\chi_0}{\partial\eta^2}\right\}.$$

Führen wir für χ_0, χ_1, χ_2 die oben gefundenen Werte ein, so gelangen wir durch eine ausgedehntere Rechnung zu einer Differentialgleichung für χ_3, die erkennen läßt, daß wir χ_3 folgendermaßen darzustellen haben:

$$\chi_3 = r\bar{u}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^3\zeta_3 + \bar{u}^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{3b} + r\bar{u}^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\zeta_{3c}$$

$$+ r\bar{u}^3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^3}\zeta_{3d} + \bar{u}^3\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{3e} + \bar{u}^3\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{3f}$$

$$+ \frac{1}{r}\bar{u}^3\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\zeta_{3g} + \bar{u}^4\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}\zeta_{3h} + \frac{1}{r}\bar{u}^4\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{3i}$$

$$+ \frac{1}{r^2}\bar{u}^4\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^3\zeta_{3k}.$$

Dabei hat ζ_3 der Differentialgleichung

$$\zeta_3''' + 2\eta\,\zeta_3'' - 12\,\zeta_3' = 4f_3$$

zu genügen mit den Grenzbedingungen:

$$\text{für } \eta = 0:\quad \zeta_3 = 0;\ \zeta_3' = 0,$$
$$\text{für } \eta = \infty:\quad \zeta_3' = 0.$$

Zur Berechnung von $\zeta_3(\eta = 0)$ ist nur die Kenntnis von $4f_3$ notwendig. Aus der Differentialgleichung für χ_3 folgen für f_3 die Ausdrücke:

$$f_{3a} = -\zeta_0 \zeta''_{2a} + 2\zeta'_0 \zeta'_{2a} - \zeta''_0 \zeta_{2a} - \zeta_{1a} \zeta''_{1a} - \zeta'^2_{1a};$$

$$f_{3b} = -\zeta_0 \zeta''_{2a} - \zeta_0 \zeta''_{2c} + 3\zeta'_0 \zeta_{2c} - \zeta''_0 \zeta_{2a} - 2\zeta''_0 \zeta_{2c} - \zeta_{1a} \zeta''_{1a} - \zeta_{1a} \zeta''_{1b} + 3\zeta'_{1a} \zeta'_{1b} - 2\zeta_{1b} \zeta''_{1a};$$

$$f_{3c} = -\zeta_0 \zeta''_{2b} + 2\zeta'_0 \zeta'_{2a} + 3\zeta'_0 \zeta'_{2b} - 2\zeta''_0 \zeta_{2a} - 2\zeta''_0 \zeta_{2b} - \zeta_{1a} \zeta''_{1a} + \zeta_{1a};$$

$$f_{3d} = \zeta'_0 \zeta'_{2b} - \zeta''_0 \zeta_{2b};$$

$$f_{3e} = -\zeta_0 \zeta''_{2b} + \zeta'_0 \zeta'_{2c} - \zeta''_0 \zeta_{2b} - \zeta''_0 \zeta_{2c} - \zeta_{1a} \zeta''_{1b} + \zeta'_{1a} \zeta'_{1b};$$

$$f_{3f} = -\zeta_0 \zeta''_{2d} + \zeta'_0 \zeta'_{2c} + 4\zeta'_0 \zeta'_{2d} - \zeta''_0 \zeta_{2c} - 3\zeta''_0 \zeta_{2d} + \zeta'_{1a} \zeta'_{1b} - \zeta''_{1a} \zeta_{1b};$$

$$f_{3g} = -\zeta_0 \zeta''_{2c} - \zeta_0 \zeta''_{2e} - \zeta'_0 \zeta'_{2e} + 4\zeta'_0 \zeta'_{2e} - 3\zeta''_0 \zeta_{2e} - \zeta_{1a} \zeta''_{1b} - \zeta'_{1a} \zeta'_{1b} + 2\zeta'^2_{1b} - 2\zeta_{1b} \zeta''_{1b};$$

$$f_{3h} = \zeta'_0 \zeta'_{2d} - \zeta''_0 \zeta_{2d}$$

$$f_{3i} = -\zeta_0 \zeta''_{2d} - \zeta'_0 \zeta'_{2d} + 2\zeta'_0 \zeta'_{2e} - 2\zeta''_0 \zeta_{2e} - \zeta_{1b} \zeta''_{1b} + \zeta'^2_{1b}$$

$$f_{3k} = -\zeta_0 \zeta''_{2e} - 2\zeta'_0 \zeta'_{2e} + \zeta''_0 \zeta_{2e} - \zeta'^2_{1b}.$$

Die zehn Funktionen sind mit einem Einflußkoeffizienten ϑ_{30} zu multiplizieren und über sie von 0 bis ∞ zu integrieren, dann haben wir die gesuchten $\zeta_3(\eta = 0)$. Für ϑ_{30} ergibt sich der Ausdruck:

$$\vartheta_{30} = \frac{2}{15\sqrt{\pi}} \left\{ (15 + 90\eta^2 + 60\eta^4 + 8\eta^6) e^{\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + (33\eta + 28\eta^3 + 4\eta^5) \right\}.$$

Die folgenden Tabellen enthalten die Werte von $4f_3$ und ϑ_{30} (Fig. 17 u. 18).

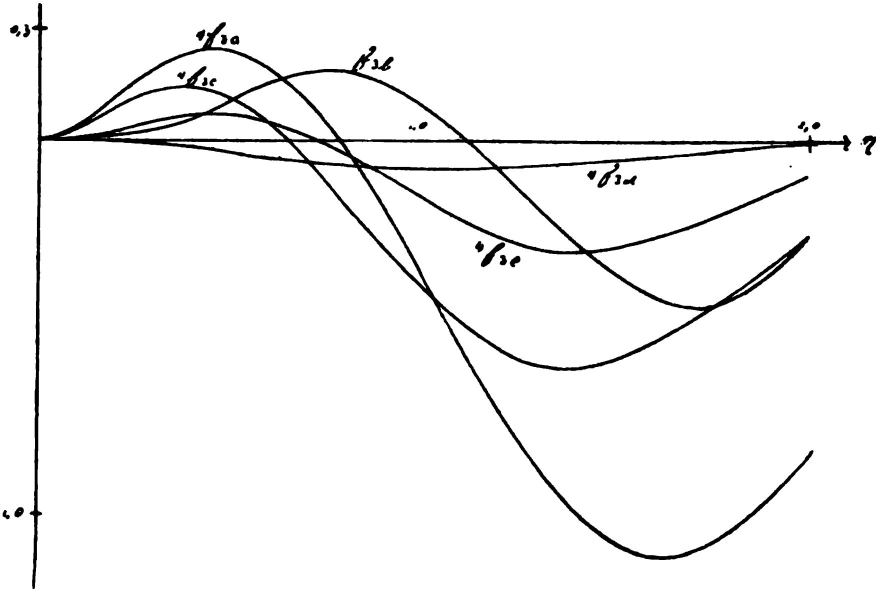


Fig. 17.

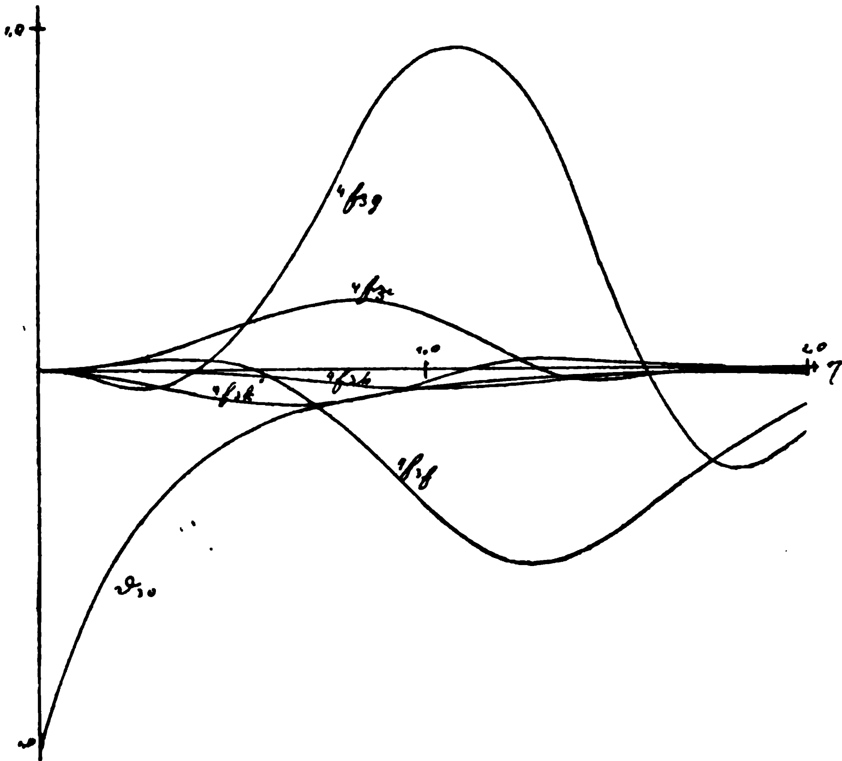


Fig. 18.

η	$4f_{3a}$	$4f_{3b}$	$4f_{3c}$	$4f_{3d}$	$4f_{3e}$	$4f_{3f}$
0,1	0,040	— 0,010	0,034	— 0,002	0,008	0,002
0,2	0,116	0,007	0,092	— 0,007	0,025	0,012
0,3	0,183	0,082	0,130	— 0,014	0,045	0,018
0,4	0,236	0,209	0,146	— 0,024	0,061	0,020
0,5	0,245	0,387	0,120	— 0,036	0,063	0,011
0,6	0,212	0,594	0,049	— 0,047	0,052	— 0,018
0,7	0,132	0,688	— 0,046	— 0,057	0,020	— 0,070
0,8	0,008	0,725	— 0,166	— 0,065	— 0,028	— 0,159
0,9	— 0,155	0,632	— 0,292	— 0,069	— 0,088	— 0,253
1,0	— 0,347	0,405	— 0,410	— 0,070	— 0,153	— 0,357
1,1	— 0,528	0,123	— 0,505	— 0,069	— 0,209	— 0,450
1,2	— 0,726	— 0,282	— 0,574	— 0,064	— 0,262	— 0,504

η	$4f_{3a}$	$4f_{3b}$	$4f_{3c}$	$4f_{3d}$	$4f_{3e}$	$4f_{3f}$
1,3	— 0,881	— 0,725	— 0,618	— 0,057	— 0,291	— 0,526
1,4	— 1,002	— 1,084	— 0,603	— 0,050	— 0,300	— 0,484
1,5	— 1,083	— 1,434	— 0,578	— 0,044	— 0,284	— 0,415
1,6	— 1,111	— 1,650	— 0,540	— 0,037	— 0,262	— 0,347
1,7	— 1,096	— 1,746	— 0,482	— 0,030	— 0,225	— 0,283
1,8	— 1,031	— 1,698	— 0,411	— 0,024	— 0,180	— 0,222
1,9	— 0,939	— 1,389	— 0,337	— 0,019	— 0,140	— 0,168
2,0	— 0,823	— 1,003	— 0,255	— 0,015	— 0,102	— 0,150

η	$4f_{3g}$	$4f_{3h}$	$4f_{3i}$	$4f_{3k}$	ϑ_{30}
0	0	0	0	0	— 1
0,1	— 0,008	— 0,000	0,004	— 0,004	— 0,700
0,2	— 0,027	— 0,002	0,014	— 0,017	— 0,495
0,3	— 0,031	— 0,005	0,037	— 0,040	— 0,353
0,4	— 0,003	— 0,010	0,067	— 0,064	— 0,254
0,5	0,072	— 0,016	0,102	— 0,088	— 0,184
0,6	0,193	— 0,024	0,138	— 0,106	— 0,135
0,7	0,368	— 0,032	0,167	— 0,104	— 0,099
0,8	0,554	— 0,040	0,183	— 0,091	— 0,074
0,9	0,723	— 0,048	0,179	— 0,064	— 0,056
1,0	0,831	— 0,054	0,149	— 0,036	— 0,042
1,1	0,861	— 0,055	0,098	— 0,010	— 0,032
1,2	0,801	— 0,046	0,041	0,016	— 0,024
1,3	0,644	— 0,038	— 0,000	0,018	— 0,018
1,4	0,449	— 0,027	— 0,016	0,012	— 0,014
1,5	0,185	— 0,019	— 0,005	0,008	— 0,011
1,6	— 0,054	— 0,013	0,000	0,006	— 0,009
1,7	— 0,248	— 0,010	0,002	0,004	— 0,006
1,8	— 0,308	— 0,007	0,002	0,002	— 0,004
1,9	— 0,236	— 0,004	0,002	0,001	— 0,004
2,0	— 0,094	— 0,001	0,000	0,001	— 0,003

Für $\zeta_3''(\eta = 0)$ ergeben sich dann folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\zeta_{3a}''(\eta = 0) &= -0{,}017\\
\zeta_{3b}''(\eta = 0) &= -0{,}031\\
\zeta_{3c}''(\eta = 0) &= -0{,}006\\
\zeta_{3d}''(\eta = 0) &= 0{,}005\\
\zeta_{3e}''(\eta = 0) &= -0{,}003\\
\zeta_{3f}''(\eta = 0) &= 0{,}008\\
\zeta_{3g}''(\eta = 0) &= -0{,}022\\
\zeta_{3h}''(\eta = 0) &= 0{,}003\\
\zeta_{3i}''(\eta = 0) &= -0{,}013\\
\zeta_{3k}''(\eta = 0) &= 0{,}009.
\end{aligned}$$

14. Über die höheren Glieder der Entwicklung von ψ können wir noch kurz folgende Bemerkungen machen; und zwar wollen wir zuerst untersuchen, wie die Anzahl der ζ_n mit wachsendem n wächst. Betrachten wir in χ_n die Koeffizienten der ζ_n, so finden wir, daß die Dimensionen derselben die folgenden sind:

$$\text{für } n = 0:\ r\bar{u}$$

$$\text{für } n = 1:\ \frac{r\bar{u}^2}{x}$$

$$\text{für } n = 2:\ \frac{r\bar{u}^3}{x^2}$$

$$\text{für } n = 3:\ \frac{r\bar{u}^4}{x^3}.$$

Also allgemein für n: $\dfrac{r\bar{u}^{n+1}}{x_n}$.

Aus diesen Dimensionen folgt die Anzahl der Glieder daraus, daß sie eben so groß sein muß, als man verschiedene Ausdrücke von gleicher Dimension bilden kann. Dabei ist aber die Einschränkung zu machen, daß x nur als Größe auftreten darf, nach der differentiiert wird. Daraus folgt sofort, daß die Anzahl der Glieder sich so verteilt:

für $n = 0$: 1 Glied: $r\bar{u}$;

für $n = 1$: 2 Glieder: $r\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\bar{u}^2\dfrac{\partial r}{\partial x}$;

für $n = 2$: 5 Glieder: $r\bar{u}\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2$, $r\bar{u}^2\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$, u. s. f.

für $n = 3$: 10 Glieder: $r\bar{u}\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^3$, $r\bar{u}^3\dfrac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3}$, u. s. f.

Diese Gliederzahlen ergaben sich schon in unseren obigen Rechnungen. Man kann sich nun überlegen, daß χ_4 aus 17 Gliedern bestehen muß. Bilden wir die Differenzen der Gliederanzahlen für aufeinander folgende n, so ergibt sich das Resultat, daß die Anzahl der Glieder eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenzen die ungeraden Zahlen sind. Es steigt also die Länge der χ_n mit wachsendem n ganz bedeutend, und damit ist auch der numerischen Berechnung weiterer Glieder aus praktischen Gründen eine Schranke gesetzt.

Über $\zeta_n''(\eta = 0)$ und $\zeta_n(\eta = \infty)$ können wir aussagen, daß sie mit wachsendem n kleiner werden, daß daher der Einfluß der höheren Glieder auf Ablösungsstelle[1]) und Ablösungszeit geringer wird. Ersteres können wir daraus schließen, daß der Einflußkoeffizient ϑ_{n0} sich mehr und mehr an die η-Achse anschmiegt. Andrerseits ist

$$\vartheta_{n\infty} = -\frac{1}{4n+2}(1+\vartheta_{n0}).$$

$|\vartheta_{n0}|$ nähert sich also der Asymptote $\frac{1}{4n+2}$, ohne vorher im Endlichen diesen Wert überschreiten zu können. Es muß daher die Kurve ζ_n flacher und flacher werden, damit aber auch ihre beiden ersten Ableitungen.

15. Fassen wir nun kurz unser Resultat bis hierher zusammen. Wir hatten den Ansatz gemacht

$$\psi = 2\sqrt{xt}\sum_0^\infty{}_\nu\, t^\nu \chi_\nu(x, \eta)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{xt}},$$

woraus:

$$u = \frac{1}{r}\sum_0^\infty{}_\nu\, t^\nu \frac{\partial \chi_\nu}{\partial \eta}$$

folgt. Die Entwicklungen sind bis $\nu = 2$ durchgerechnet, sodaß wir folgende Gleichungen haben:

---

1) Für die Ablösungs stelle gilt diese Bemerkung nur, falls nicht die in Betracht kommende Zeit so groß ist, daß die Potenzen der Zeit, die als Faktoren auftreten, überwiegen (vergl. S. 48 u.).

$$\psi = 2\sqrt{\varkappa t}\,(\chi_0 + t\chi_1 + t^2\chi_2)$$

$$+ t^2\left(r\bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 \zeta_{2a} + r\bar{u}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \zeta_{2b} + \bar{u}^2 \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \zeta_{2c}\right.$$

$$= 2\sqrt{\varkappa t}\left\{r\bar{u}\zeta_0 + t\left(r\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\zeta_{1a} + \bar{u}^2 \frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{1b}\right)\right.$$

$$\left.\left. + \bar{u}^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{2d} + \frac{1}{r}\bar{u}^2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \zeta_{2e}\right)\right\}$$

$$u = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \chi_0}{\partial \eta} + t\frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} + t^2\frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} + t^3\frac{\partial \chi_3}{\partial \eta}\right)$$

$$= \bar{u}\zeta_0' \quad + t\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\zeta_{1a}' + \frac{1}{r}\bar{u}^2\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{1b}'\right] + t^2\left[\bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 \zeta_{2a}'\right.$$

$$\left. + \bar{u}^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\zeta_{2b}' + \bar{u}^2\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{2c}' + \bar{u}^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{2d}' + \frac{1}{r^2}\bar{u}^3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\zeta_{2e}'\right]$$

$$+ t^3\left[\bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^3 \zeta_{3a}' + \frac{1}{r}\bar{u}^2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{3b}' + \bar{u}^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\zeta_{3c}'\right.$$

$$+ \bar{u}^3\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3}\zeta_{3d}' + \frac{1}{r}\bar{u}^3\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{3e}' + \frac{1}{r}\bar{u}^3\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{3f}'$$

$$+ \frac{1}{r^2}\bar{u}^3\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{dx}\right)^2\zeta_{3g}' + \frac{1}{r}\bar{u}^4\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}\zeta_{3h}' + \frac{1}{r^2}\bar{u}^4\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{3i}'$$

$$\left. + \frac{1}{r^3}\bar{u}^4\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^3\zeta_{3k}'\right].$$

Die dritte Potenz ist aus folgenden Gründen hinzugefügt: Die Ablösungsstelle ist gegeben durch

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{für } \eta = 0.$$

Also erhalten wir für dieselbe die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\left\{\bar{u}\zeta_0''(0) + t\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\zeta_{1a}''(0) + \bar{u}^2\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{1b}''(0)\right]\right.$$

$$+ t^2\left[\bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2\zeta_{2a}''(0) + \bar{u}^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\zeta_{2b}''(0) + \bar{u}^2\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{2c}''(0)\right.$$

$$\left. + \bar{u}^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{2d}''(0) + \frac{1}{r^2}\bar{u}^3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\zeta_{2}''(0)\right]$$

$$+ t^3\left[\bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^3\zeta_{3a}''(0) + \frac{1}{r}\bar{u}^2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{3b}''(0) + \bar{u}^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\zeta_{3c}''(0)\right.$$

$$+ \bar{u}^3\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3}\zeta_{3d}''(0) + \frac{1}{r}\bar{u}^3\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{3e}''(0) + \frac{1}{r}\bar{u}^3\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{3f}''(0)$$

$$+ \frac{1}{r^2} \bar{u}^3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \zeta''_{3g}(0) + \frac{1}{r} \bar{u}^4 \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} \zeta''_{3h}(0)$$

$$+ \frac{1}{r^2} \bar{u}^4 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \zeta''_{3i} + \frac{1}{r^3} \bar{u}^4 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^3 \zeta''_{3k}\Big]\Big\}.$$

Dividieren wir durch $\dfrac{\bar{u}}{2\sqrt{\varkappa t}}$ und führen wir für $\zeta''_n(0)$ die berechneten Werte ein, so erhalten wir:

$$0 = 1{,}128 + t\left[1{,}614 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 0{,}169\, \bar{u} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x}\right]$$

$$- t^2 \left[0{,}248 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + 0{,}068\, \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 0{,}029\, \bar{u} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x}\right.$$

$$\left. + 0{,}022\, \bar{u}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 0{,}036 \frac{1}{r^2} \bar{u}^2 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$- t^3 \left[0{,}017 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^3 + 0{,}031\, \bar{u} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial x} + 0{,}006\, \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right.$$

$$- 0{,}005\, \bar{u}^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + 0{,}003\, \bar{u}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \frac{\partial r}{\partial x} - 0{,}008\, \bar{u}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$+ 0{,}022 \frac{1}{r^2} \bar{u}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 0{,}003 \frac{1}{r} \bar{u}^3 \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} + 0{,}013 \frac{1}{r^2} \bar{u}^3 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\left. - 0{,}010 \frac{1}{r^3} \bar{u}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^3\right] - [t^4].$$

Dies ist die endgültige Ablösungsgleichung für beliebige Rotationskörper.

16. Ist mir die Stelle bekannt, an der die Ablösung zuerst eintritt, so kann ich mir aus dieser Gleichung die „Ablösungszeit“

$$t = [t]$$

berechnen. Dies würde gelten für Körper, die weder in Spitze noch Kegel auslaufen und deren Ende konvex ist; denn von diesen Körpern können wir aussagen, daß die Ablösung zuerst am hintersten Ende statthat, falls nicht an einer weiter nach vorn liegenden Stelle $\left|\dfrac{dr}{dx}\right|$ sehr groß ist. Bei den hier ausgeschlossenen Körpern kann es sehr wohl geschehen, daß die Ablösung an irgend einer anderen Stelle eintritt. In diesem Falle kann man die Ablösungszeit so bestimmen, daß man für verschiedene Ablösungsstellen die Zeiten berechnet. Trage ich mir dann die Zeit als Funktion dieser auf, so muß die Kurve an der Stelle, wo die Ablösung zuerst eintritt ein Minimum haben.

III. Anwendung der Resultate auf die Kugel.

1. Für die Kugel ist

$$\bar{u} = \tfrac{3}{2} V \sin \frac{x}{R},$$

wenn V die Strömungsgeschwindigkeit der Flüsssigkeit im ungestörten Zustande oder auch die Geschwindigkeit, mit der die Kugel durch die ruhende Flüssigkeit bewegt wird, ist. Mit R bezeichnen wir den Kugelradius, mit x die Bogenlänge längs eines größten Kreises (Fig. 19). Dann ist

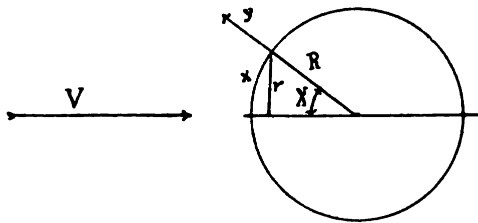


Fig. 19.

$$r = R \sin \frac{x}{R};$$

also:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{V}{R}\cos\frac{x}{R}; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}\frac{V}{R^2}\sin\frac{x}{R}; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\frac{1}{R}\sin\frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} = -\frac{3}{2}\frac{V}{R^3}\cos\frac{x}{R}; \quad \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} = -\frac{1}{R^2}\cos\frac{x}{R}.$$

2. Unsere Ablösungsgleichung lautet, wenn wir durch 1,128 dividieren:

$$1 + \left[1{,}423 \cos\frac{x}{R} + 0{,}150 \cos\frac{x}{R}\right]\frac{3}{2}\frac{V}{R}t$$

$$-\left[0{,}220 \cos^2\frac{x}{R} - 0{,}060 \sin^2\frac{x}{R} + 0{,}026 \cos^2\frac{x}{R} - 0{,}020 \sin^2\frac{x}{R}\right.$$

$$\left. - 0{,}032 \cos^2\frac{x}{R}\right]\left(\frac{3}{2}\frac{V}{R}t\right)^2$$

$$-\left[0{,}015 \cos^3\frac{x}{R} - 0{,}028 \cos^3\frac{x}{R} - 0{,}006 \sin^2\frac{x}{R}\cos\frac{x}{R}\right.$$

$$+ 0{,}005 \sin^2\frac{x}{R}\cos\frac{x}{R} - 0{,}002 \sin^2\frac{x}{R}\cos\frac{x}{R} + 0{,}007 \sin^2\frac{x}{R}\cos\frac{x}{R}$$

$$+ 0{,}020 \cos^3 \frac{x}{R} + 0{,}002 \sin^2 \frac{x}{R} \cos \frac{x}{R} - 0{,}011 \sin^2 \frac{x}{R} \cos \frac{x}{R}$$

$$- 0{,}008 \cos^3 \frac{x}{R}\Bigg] \left(\frac{3}{2} \frac{V}{R} t\right)^3 = 0.$$

Der Einfachheit halber führen wir neue Variable ein, indem wir setzen:

$$\frac{x}{R} = X, \quad \frac{3}{2} \frac{V}{R} t = T.$$

Bei der Kugel tritt die erste Ablösung sicher bei

$$X = \pi$$

ein, sodaß wir für die Ablösungszeit $[T]$ die Gleichung erhalten:

$$1 - 1{,}573\,[T] - 0{,}214\,[T]^2 - 0{,}001 \cdot [T]^3 = 0.$$

Für $[T]$ ergibt sich daraus

$$[T] = 0{,}589$$

also

$$[t] = 0{,}392 \frac{R}{V}.$$

Man sieht, daß die dritte Potenz von $[T]$ für die Ablösungs**zeit** nur wenig in Betracht kommt.

Die Kugel hat, wenn die Ablösung eintritt, bereits einen Weg zurückgelegt, der annähernd $\frac{2}{5}$ des Kugelradius lang ist; dies gilt für jede Geschwindigkeit und jeden Radius.

3. Wir berechnen uns nun noch die Stromfunktion ψ. Es war

$$\psi = 2\sqrt{\varkappa t}\Bigg[r\bar{u}\zeta_0 + t\left(r\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\zeta_{1a} + \bar{u}^2 \frac{\partial r}{\partial x}\zeta_{1b}\right)$$

$$+ t^2\left(\bar{u}r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 \zeta_{2a} + r\bar{u}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\zeta_{2b} + \bar{u}^2 \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\zeta_{2c} + \bar{u}^3 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\zeta_{2d}\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{r}\bar{u}^3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \zeta_{2e}\right)\Bigg].$$

Auf die Kugel angewendet:

$$\psi = 2\sqrt{\varkappa t}\left[\frac{3}{2}\frac{V}{R}\sin^2\frac{x}{R}\zeta_0 + \frac{9}{4}\,V^2 \sin^2\frac{x}{R}\cos\frac{x}{R}\,t\,(\zeta_{1a} + \zeta_{1b})\right.$$

$$\left.+ \frac{27}{8}\frac{V^3}{R}\sin^2\frac{x}{R}\,t^2\left\{\cos^2\frac{x}{R}(\zeta_{2a} + \zeta_{2c} + \zeta_{2e}) - \sin^2\frac{x}{R}(\zeta_{2b} + \zeta_{2d})\right\}\right].$$

Setzen wir wieder

$$\frac{x}{R} = X; \quad \frac{3}{2}\frac{V}{R}t = T,$$

so vereinfacht sich die Gleichung dahin:

$$\psi = \sqrt{6\varkappa VR^3}\sqrt{T}\sin^2 X[\zeta_0 + T\cos X(\zeta_{1a} + \zeta_{1b}) \\ + T^2\{\cos^2 X(\zeta_{2a} + \zeta_{2c} + \zeta_{2e}) - \sin^2 X(\zeta_{2b} + \zeta_{2d})\}].$$

Endlich führen wir auch für ψ eine neue Variable ein:

$$\psi = \sqrt{6\varkappa VR^3}\,\Psi,$$

sodaß wir schließlich die einfache Gleichung haben:

$$\Psi = \sqrt{T}\sin^2 X[\zeta_0 + T\cos X(\zeta_{1a} + \zeta_{1b}) + T^2\{\cos^2 X(\zeta_{2a} + \zeta_{2c} + \zeta_{2e}) \\ - \sin^2 X(\zeta_{2b} + \zeta_{2d})\}.$$

Wir können nun leicht für T irgend welche Werte einsetzen und damit Ψ als Funktion von η berechnen. Aus dieser Kurvenschaar findet man auf einfache Art die Stromlinien, d. h. ψ als Funktion x.

4. Es empfiehlt sich, um genauer den Vorgang der Ablösung zu studieren, zunächst zuzusehen, wie die Dicke der Wirbelschicht mit der Zeit wächst. Wir betrachten zu dem Ende die Stromlinie $\Psi = 0$, und fragen uns hier wiederum zuerst, wie bewegt sich der Ablösungskreis auf der Kugel fort. Wir setzen in der Ablösungsgleichung für X die Werte von π an abwärts ein und erhalten so für T resp. t Gleichungen dritten Grades, die man mit Hülfe des Newtonschen Interpolationsverfahrens unschwer lösen kann. Für die Ablösungsgleichung schreiben wir:

$$1 + 1{,}573\cos XT - (0{,}214\cos^2 X - 0{,}080\sin^2 X)\,T^2 \\ + (0{,}001\cos^3 X - 0{,}005\sin^2 X\cos X)\,T^3 = 0$$

oder in einer zur Rechnung geeigneteren Form:

$$1 + 1{,}573\cos XT - (0{,}294\cos^2 X - 0{,}080)\,T^2 \\ - (0{,}003\cos^2 X - 0{,}005)\cos XT^3 = 0.$$

Führen wir die Rechnung für verschiedene Werte von X aus, so erhalten wir folgende Kurve (Fig. 20):

X	180°	175°	170°	165°	160°	155°	150°
T	0,589	0,591	0,598	0,610	0,628	0,653	0,685
$t\frac{V}{R}$	0,392	0,394	0,399	0,407	0,419	0,435	0,457

X	145°	140°	135°	120°	115°	110°	90°
T	0,727	0,782	0,854	1,280	1,599	2,258	∞
$t\frac{V}{R}$	0,484	0,521	0,569	0,853	1,066	1,505	∞

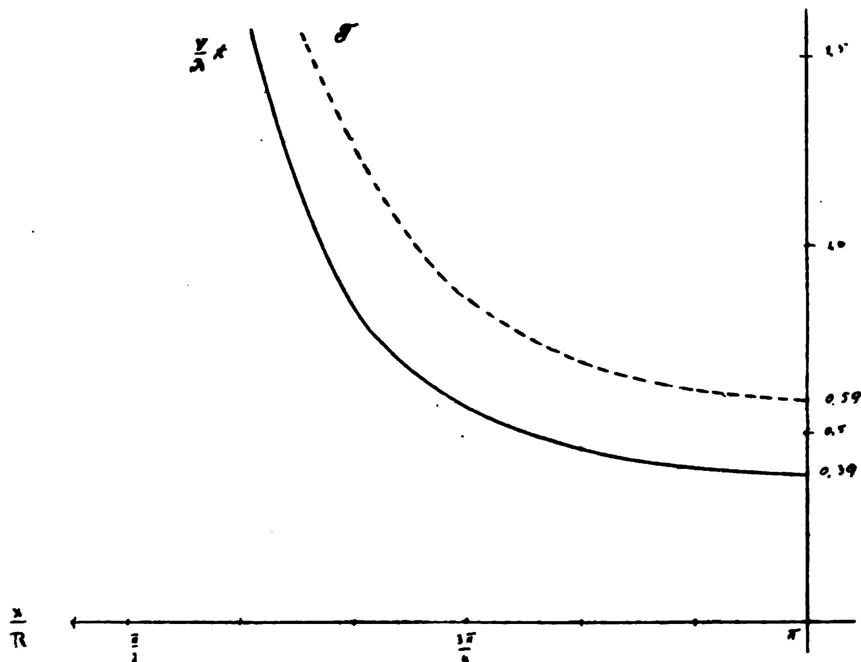


Fig. 20.

Die Werte sagen über das Fortschreiten der Ablösung folgendes aus: nach Verlauf der kritischen Zeit

$$t = [t]$$

beginnt die Ablösung plötzlich, und die Ablösungsstelle bewegt sich anfangs mit unendlicher großer Geschwindigkeit fort, läuft dann langsamer und langsamer und erreicht nach unendlicher langer Zeit die Stelle $X = \frac{\pi}{2}$. Über diesen Punkt hinaus kann sie nicht fortschreiten, solange die Dicke der Wirbelschicht hinter der Kugel — so wie hier angenommen — noch klein gegen den Kugelradius ist. Die Ablösung tritt zuerst ein, wenn die Kugel sich ungefähr um $\frac{2}{5}$ ihres Radius fortbewegt hat und ist bereits um

38^0 weitergerückt, wenn die Kugel um die halbe Radiuslänge, also nur um ein $^1/_{10}$ weiter als vorher, sich verschoben hat. Dann geht es langsamer, sodaß auf eine weitere Weglänge von einem halben Kugelradius nur noch 28^0 kommen. In Figur 21 sind die vier genannten Lagen der Kugel mit ihren entsprechenden Ablösungsstellen schematisch wiedergegeben mit Innehaltung der Verhältnisse (die Dicke der Wirbelschicht ist überhöht).

5. Die weitere Untersuchung bezieht sich darauf, wie dick zu bestimmten Zeiten an den verschiedenen Stellen der Kugel die Wirbelschicht ist, d. h. wir untersuchen für verschiedene X den Abstand y der Stromlinie $\Psi = 0$ als Funktion von t. Zur Berechnung wird die Gleichung der Stromlinie:

$$\Psi = \sin^2 X \sqrt{T}\,[\zeta_0 + T \cos X (\zeta_{1a} + \zeta_{1b}) + T^2 \{\cos^2 X (\zeta_{2a} + \zeta_{2c} + \zeta_{2e}) - \sin^2 X (\zeta_{2b} + \zeta_{2d})\}$$

verwendet. Für $\Psi = 0$ können wir schreiben:

$$0 = \zeta_0 + T \cos X (\zeta_{1a} + \zeta_{1b}) + T^2 \{\cos^2 X (\zeta_{2a} + \zeta_{2b} + \zeta_{2c} + \zeta_{2d} + \zeta_{2e}) - (\zeta_{2b} + \zeta_{2d})\}.$$

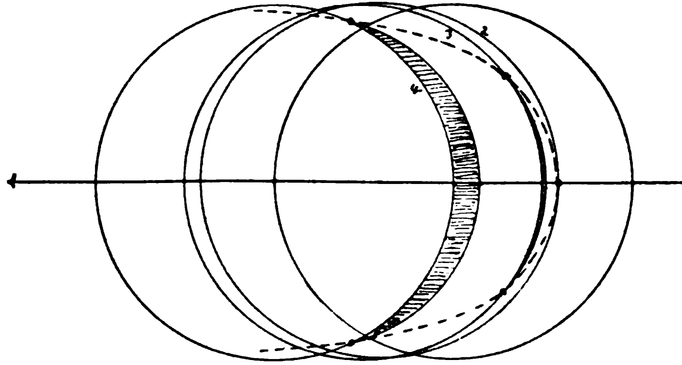


Fig. 21.

Dabei ist ζ als Funktion von η berechnet, und es ist deshalb zu berücksichtigen, daß:

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{T}} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{V}{\varkappa R}}$$

$$T = \frac{3}{2} \frac{V}{R} t$$

ist. Für X setzen wir die verschiedenen Werte von π bis $\frac{\pi}{2}$ ein und erhalten so eine Kurvenschaar

$$y = f(X, t),$$

wo X die Rolle eines Parameters spielt (Fig. 22). Die Kurven, deren Punkte zahlenmäßig anzugeben wenig Wert hat, sind annähernd gradlinig, d. h. $\frac{dy}{dt} \sim$ const., also wächst die Dicke mit konstanter Geschwindigkeit.

Dieses Resultat stimmt offenbar mit den Erscheinungen nicht überein. Man beobachtet nämlich, daß das Anwachsen der Wirbelschicht immer rascher und rascher vor sich geht, so daß ihre Dicke in kurzer Zeit mit dem Kugelradius vergleichbar wird. Das Gradlinige kommt nur daher, daß die Reihe hinter dem Glied T^2 abgebrochen wird; und es ist vorauszusehen, daß für größere T die höheren Glieder nicht gegenüber den niederen vernachlässigt werden dürfen. Die weiteren Aussagen sind daher nur unter der Voraussetzung, daß die Glieder von höherer als zweiter Potenz in T vernachlässigt werden dürfen, zu verstehen.

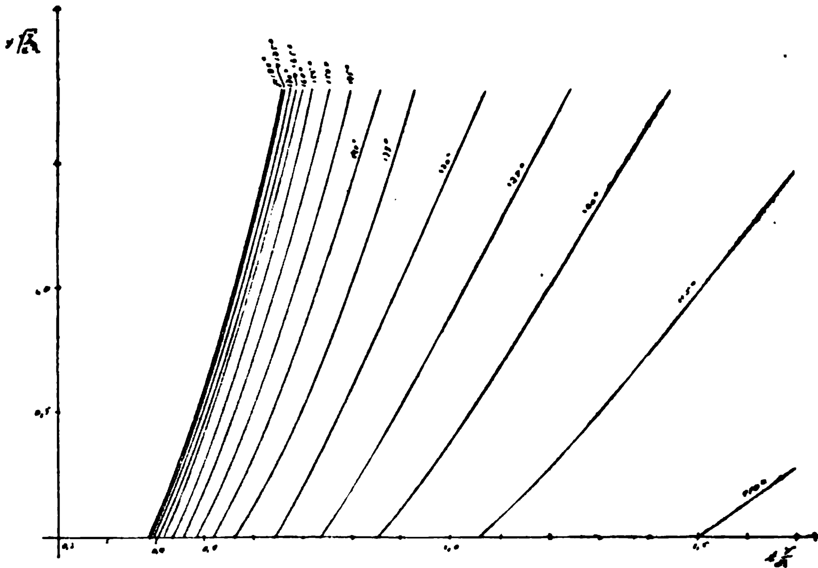


Fig. 22. (Die Kurven sind von 5° zu 5° angegeben von 110°—180°).

Die Geschwindigkeit ist für $X = \pi$ am größten und nimmt mit X ab, bis sie bei $X = \frac{\pi}{2}$ den Wert Null erreicht. Um einen Einblick in die relative Dicke der Grenzschichten zu erhalten, wollen wir einen speziellen Fall betrachten. t sei gleich $0{,}5\,\frac{R}{V}$, dann ist die Ablösung ungefähr um 38° fortgeschritten, und y ist

für $X = \pi$ ungefähr $0{,}59\sqrt{\frac{\varkappa R}{V}}$. Nehmen wir $R = 10$ cm und $V = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, dann wird

$$t = 0{,}5 \text{ sec}$$

und, wenn wir

$$\varkappa = 0{,}01 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \text{ (Wasser)}$$

annehmen,

$$y = 0{,}059 \text{ cm}.$$

Also verhält sich der Radius zur Dicke des Wirbels wie 1000 : 6. Die Störung durch die Reibung erstreckt sich auf ungefähr 0,3 cm, und die Verdickung (s. u. 6.) beträgt ungefähr 0,19 cm. Man sieht aus diesen Angaben, daß wir die Grenzschicht bildlich nur darstellen können, indem wir für y einen Maßstab wählen, der groß ist gegen den der X-Koordinate.

Aus der Kurvenschaar Fig. 22 können wir sofort eine neue finden, die uns die Lage der Stromlinie $\psi = 0$ für verschiedene Zeiten angibt. Aus derselben können wir uns ein Bild über den Verlauf der Stromlinien $\psi \gtrless 0$ machen; wir sehen zugleich, wie sich die Wirbelschicht weiter und weiter hinter der Kugel ausdehnt (Fig. 23).

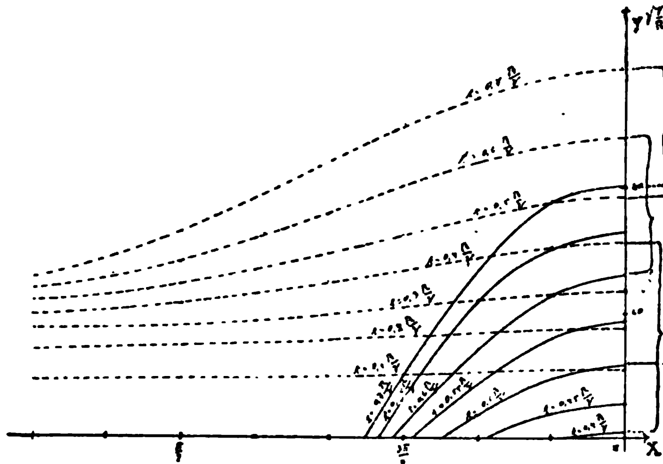


Fig. 23. (Die Kurven sind von 0,1 zu 0,1 angegeben).

6. Die Übersicht über die Wirkung der Grenzschicht wird noch weiterhin sehr erhöht, wenn man noch die scheinbare Verdickung des Körpers zeichnet. Da außerhalb der Grenzschicht

Potentialströmung herrschen soll, so muß es möglich sein!, den Körper zu finden, der zu dieser reinen Potentialströmung gehört. Die in dieser Arbeit berechneten Geschwindigkeitsprofile (u als Funktion von y bei konstantem X) näheren sich einer Asymptote $\bar{u}$. Diese Asymptote stellt die Geschwindigkeit bei vollständiger Potentialströmung dar (Fig. 24). Deshalb muß die Grenze des Hilfskörpers an der Stelle $y = \bar{y}$ liegen, welche (wegen der Kontinuität) gleichen Inhalt der in Fig. 24 schraffierten Flächen liefert. Dieses $\bar{y}$ entspricht dem Schnittpunkt der Asymptote der Kurve ψ als Funktion von y für konstantes X. Die so gefundenen Verdickungen sind in Fig. 23 eingetragen.

7. Der eingeschlagene Weg der Untersuchung 1) der Ausdehnung, 2) der Dicke des Wirbels und 3) der Verdickung ist dem vorgezogen, auf dem man von den Strömungsbildern selbst ausgeht, obgleich der letztere Weg wohl schneller zum Ziele zu führen scheint. Bei letzteren Betrachtungen würden die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Grenzschicht ändert, nicht so klar hervortreten, wie sie es mir bei dem oben genannten Verfahren zu tun scheinen.

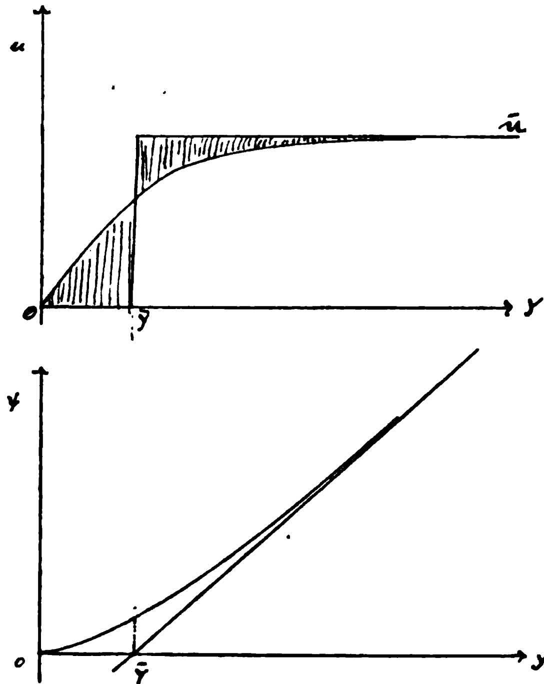


Fig. 24.

8. Dennoch ist es von großem Nutzen, wenn wir für eine bestimmte Zeit, in der der Wirbel schon weiter ausgebildet ist, das

Bild der Stromlinien konstruieren und daran die Geschwindigkeiten studieren. In Fig. 25 ist dies geschehen für die Zeit $t = 0{,}6$ sec bei einer Geschwindigkeit von der Radiuslänge pro Sekunde. Die Überhöhung der Maße in der y-Richtung ist ungefähr 30fach. Für die Stromlinien erhalten wir die Gleichung: $\Psi = \text{const.}$, wo

$$\Psi = 0{,}775 \sin^2 X \left[\zeta_0 + T\, 0{,}6 \cos X (\zeta_{1a} + \zeta_{1b}) \right.$$
$$\left. + 0{,}36 \left\{ \cos^2 X (\zeta_{2a} + \zeta_{2b} + \zeta_{2c} + \zeta_{2d} + \zeta_{2e}) - (\zeta_{2b} + \zeta_{2d}) \right\} \right].$$

Damit haben wir Ψ als Funktion von η und damit von y bei konstantem X. Das Kriterium dafür, daß Wirbelbildung eintritt,

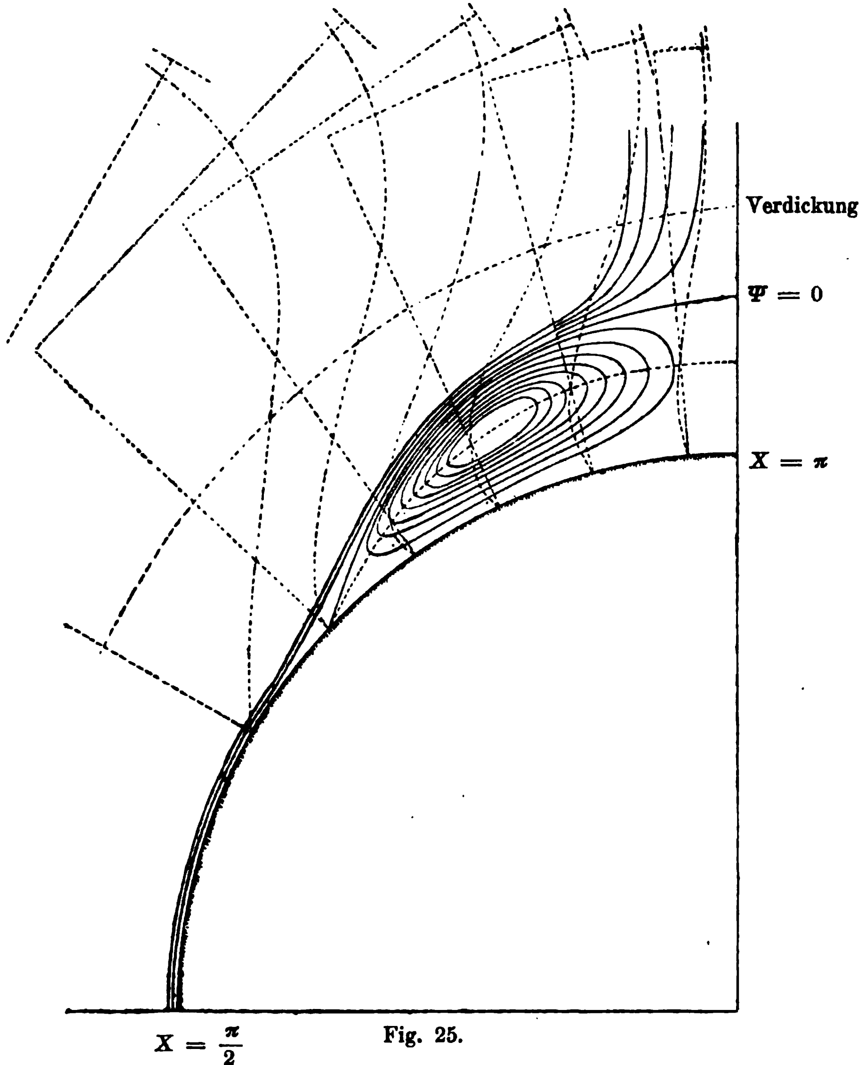


Fig. 25.

ist das, daß $\Psi(\eta)$ negativ wird. Trägt man auf einer Anzahl Radien die Funktionswerte der Ψ auf, so läßt sich hieraus sofort y als Funktion von X für jede Stromlinie Ψ = const. entnehmen. Wenn wir noch für die verschiedenen X die Geschwindigkeitsprofile auftragen (diese sind in Fig. 25 zur Darstellung gebracht), so sieht man, daß in dem Wirbel vorerst nur relativ kleine Geschwindigkeiten auftreten. Außerhalb desselben steigt die Geschwindigkeit sehr schnell auf den Potentialwert an. Man kann auch sofort die Wirbelstärke an den einzelnen Punkten aus der Figur entnehmen; denn es ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nun ist $\frac{\partial v}{\partial x} \sim \varepsilon$, kann also vernachlässigt werden, sodaß

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Der Wirbel ist gleich dem negativen Gradienten der Geschwindigkeit in Richtung der Flächennormale. Die Rotation ist, wie man sieht, absolut am stärksten außerhalb der Stromlinie $\psi = 0$ und ist in der Nähe der Kugeloberfläche nur sehr gering. Schließlich ist in Fig. 25 auch die Verdickung mit eingezeichnet.

